

**TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS
FÍSICAS**

**MODELADO DE LA COMPONENTE ELECTROMAGNÉTICA
DE LAS CASCADAS DE PARTÍCULAS GENERADAS POR
RAYOS CÓSMICOS DE ALTA ENERGÍA**

Isabel Astrid Goos
Maestrando

Xavier Bertou
Director

Miembros del Jurado
Dr. Esteban Roulet (CONICET, Centro Atómico Bariloche)
Dra. Geraldina Golup (CONICET, Centro Atómico Bariloche)
Dr. Sergio Suárez (CONICET, Centro Atómico Bariloche)

Noviembre de 2016

Física de Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A Manu

Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Índice de figuras	vii
Resumen	ix
Abstract	xi
1. Introducción	1
1.1. Rayos cósmicos y lluvias atmosféricas extendidas	1
1.2. Observatorio Pierre Auger	4
1.3. La componente electromagnética	6
2. Las ecuaciones de difusión	11
2.1. Procesos elementales	11
2.2. Definiciones y secciones eficaces de los procesos elementales	11
2.3. Aproximación A	13
2.4. Aproximación B	15
2.5. Teoría tridimensional con la aproximación de Landau	16
3. Desarrollo de la componente electromagnética	21
3.1. Desarrollo longitudinal	21
3.1.1. Soluciones elementales	21
3.1.2. Soluciones analíticas en la aproximación A	23
3.1.3. Soluciones analíticas en la aproximación B	27
3.2. Desarrollo tridimensional	33
3.3. Aplicación de la teoría tridimensional a lluvias atmosféricas extendidas . .	37
4. Simulaciones de Monte Carlo	39
4.1. Los programas CORSIKA y CONEX	40
4.2. Análisis de las partículas en el suelo y de las primeras interacciones	42
4.3. Aplicación al estudio del perfil longitudinal	47

5. Conclusiones	55
A. La transformada de Mellin	57
B. Método del punto de ensilladura	59
Bibliografía	61
Agradecimientos	63

Índice de figuras

1.1. Esquema simplificado y resumido de una lluvia atmosférica extendida.	2
1.2. Espectro diferencial de rayos cósmicos de energía por encima de 10^{11} eV multiplicado por E^2 [1]. Están resaltadas las posiciones de la <i>rodilla</i> y el <i>tobillo</i> y las regiones de energía en las cuales se presentan datos obtenidos mediante mediciones directas o el estudio de lluvias atmosféricas extendidas, respectivamente. Los diferentes experimentos que aportan datos para esta gráfica están expuestos en la esquina superior a la derecha y la energía equivalente de laboratorio a la cual se puede acceder en el <i>Large Hadron Collider</i> está señalada.	3
1.3. El Observatorio Pierre Auger [2], situado en las cercanías de Malargüe, Mendoza, Argentina. Cada punto rojo corresponde a uno de los 1660 detectores de Cherenkov en agua. La distancia entre dos de ellos es de 1500 metros salvo en una pequeña porción del arreglo que es de 750 metros. Se pueden ver los detectores de fluorescencia y el campo de visión de cada uno respectivamente.	5
1.4. Esquema de las componentes electromagnética, hadrónica y muónica de una lluvia atmosférica extendida.	7
1.5. Distribuciones de los fotones, electrones y muones que alcanzan el nivel del suelo (éstas son las partículas más representadas a ese nivel) para una simulación realizada con CORSIKA e inicializada con un protón de 10^{19} eV de energía. Se puede observar la preponderante proporción que representa la componente electromagnética entre las partículas que llegan al suelo.	8
1.6. Esquema simplificado del desarrollo de una cascada electromagnética [3]. Las hipótesis de W. Heitler son que luego que la cascada avanzó una cierta distancia d los fotones producen un par electrón-positrón y los electrones emiten un foton debido al proceso de Bremsstrahlung y que en estos procesos la energía se divide equitativamente entre sus productos.	10
2.1. Experimentos relacionados con la física de rayos cósmicos que reflejan el efecto de la extensión lateral de las cascadas.	17

2.2. Esquema que muestra de qué manera se definen los ángulos θ y φ y las coordenadas x e y en relación con el eje de la cascada.	18
3.1. Significado físico de la edad s	23
3.2. Espectros integrales de los electrones en la aproximación A para razones $\frac{E_0}{E}$ entre 10^2 y 10^6	26
3.3. Gráfico de la función $\mathcal{K}_{1,0}(s, -s)$	32
3.4. Esquema simplificado y resumido del modo en que el eje hadrónico infunde energía en la componente electromagnética.	38
4.1. Distribuciones de energía de fotones, electrones, positrones, muones negativos y muones positivos al nivel del suelo para dos simulaciones llevadas a cabo con CORSIKA iniciadas con un protón de 10^{19} eV de energía.	43
4.2. Distribuciones de energía de las partículas madre de todos los electrones, positrones y fotones que alcanzaron el nivel del suelo, separadas según si la madre interactuó o decayó a más de 13000 metros de altura o a menos.	45
4.3. Distribuciones de energía de fotones, electrones, positrones, muones negativos y muones positivos al nivel del suelo para dos simulaciones llevadas a cabo con CORSIKA iniciadas con diferentes partículas primarias de 10^{19} eV.	46
4.4. Gráficas de las subcascadas electromagnéticas generadas por el grupo de piones neutros, kaones cargados y K_L^0	49
4.5. Histogramas de los errores al comparar las cascadas electromagnéticas de 1000 lluvias simuladas (escogiendo un corte de 10^{15} eV) con las cascadas electromagnéticas producidas por los piones neutros de la misma.	52
4.6. Diagrama de dispersión en el que cada punto corresponde a una de las 1000 simulaciones.	53
4.7. Para una simulación en particular (con energía de corte 10^{15} eV) están presentadas las curvas correspondientes a la componente electromagnética generada por los piones presentes en la lista de secundarios con energías de corte artificiales de 10^{16} eV, 10^{17} eV y 10^{18} eV y sin realizar un corte artificial.	53

Resumen

El presente trabajo se centra en las lluvias atmosféricas extendidas generadas por rayos cósmicos de alta energía. Las lluvias obtenidas mediante simulaciones presentan para la mayoría de los modelos de interacciones a altas energías un déficit significativo en la componente muónica en comparación con mediciones experimentales. Un camino de abordaje posible para comprender el defecto que acarrearán estos modelos es estudiando de qué modo se relacionan parámetros propios de la componente electromagnética con parámetros inherentes a la componente muónica ya que ambas componentes proceden de fuentes comunes dentro de la cascada, principalmente de piones neutros y cargados que a su vez son producidos de manera conjunta. Con este fin se estudia en este trabajo la componente electromagnética de lluvias atmosféricas extendidas.

Se comenzó estudiando modelos que describen la evolución de la componente electromagnética: por un lado, se estudiaron las soluciones analíticas en las llamadas 'aproximación A' y 'aproximación B' que describen el perfil longitudinal de las cascadas. Estas soluciones fueron desarrolladas principalmente por B. Rossi y K. Greisen. Por otro lado, se estudiaron las funciones de estructura lateral y angular que fueron perfeccionadas por J. Nishimura y K. Kamata.

Luego, con el fin de comprender las características y la variabilidad del comportamiento de las cascadas, se estudiaron las distribuciones de las partículas que alcanzan el nivel del suelo y el origen de su producción. Para este análisis se recurrió a simulaciones individuales realizadas con el programa CORSIKA.

Posteriormente se propuso reconstruir el perfil longitudinal de la componente electromagnética de cascadas simuladas superponiendo las subcascadas electromagnéticas generadas por el conjunto de todos los piones neutros que están presentes en el desarrollo de la misma. Este análisis fue efectuado sobre un conjunto de 1000 simulaciones realizadas con el programa CONEX y se verificó que el modelo se ajusta muy bien con la componente electromagnética obtenida en la simulación una vez teniendo en cuenta el hecho que el programa desvía el conjunto de partículas con energía menor que una energía de corte preestablecida a un algoritmo que simula la evolución de las partículas de baja energía.

Palabras clave: RAYOS CÓSMICOS, COMPONENTE ELECTROMAGNÉTICA, MODELOS, SIMULACIONES

Abstract

The present work focuses on extended air showers generated by high-energy cosmic rays. It is known that simulated showers exhibit for most high-energy interaction models a significantly too low number of muons compared with experimental findings. One possible approach to this problem is studying the relation between parameters related to the electromagnetic component and parameters associated with the muonic component since both components have common sources within the shower, mostly neutral and charged pions that themselves are produced jointly. This is the main motive for presenting in this work a study on the electromagnetic component of extended air showers.

Models describing the evolution of the electromagnetic component were studied: the analytical solutions in the so-called approximations A and B that depict the longitudinal profile of showers, mainly developed by B. Rossi y K. Greisen, and the lateral and angular structure functions as improved by J. Nishimura y K. Kamata.

In order to comprehend the characteristics and variabilities of the behavior of showers, a variety of individual simulations were performed using the program CORSIKA and were analyzed. This analysis comprised the study of the distributions of the particles at ground and the origin of their production.

The final purpose was to be able to reconstruct the longitudinal profile of the electromagnetic component of simulated showers. The procedure used to achieve this was to add up all the electromagnetic subcascades generated by the neutral pions present along the development of the shower. This analysis was carried out on a set of 1000 simulations obtained with the program CONEX. The reconstruction adjusts very well the electromagnetic component obtained by the corresponding simulation once one takes into account that CONEX extracts particles whose energy is below a preestablished energy cut and introduces them into an algorithm used to simulate subcascades generated by particles of low energy.

Keywords: COSMIC RAYS, ELECTROMAGNETIC COMPONENT, MODELS, SIMULATIONS

Capítulo 1

Introducción

1.1. Rayos cósmicos y lluvias atmosféricas extendidas

Hoy sabemos que a la atmósfera terrestre llega desde todas las direcciones del firmamento un flujo continuo de partículas elementales relativistas: la radiación cósmica. Más formalmente, los *rayos cósmicos* están definidos como partículas y núcleos cargados estables que se originan fuera de nuestro sistema solar o en el sol [4]. Esta radiación fue descubierta a comienzos del siglo XX gracias a estudios realizados por diversos científicos [5] que intentaban explicar un suceso inesperado: se había observado que electroscopios se descargaban espontáneamente y la primera explicación fue que esto ocurría debido a la radiactividad natural del suelo terrestre. Con la intención de verificar esta hipótesis en 1912 el físico austríaco Victor Hess realizó viajes en globos aerostáticos hasta una altura de 5 km en los cuales esperaba registrar una atenuación del efecto por estar alejando los electroscopios de la fuente de radiactividad. Se percibió que en vez de que la tasa de descarga disminuyera ésta aumentaba. Uno y dos años más tarde Werner Kolhörster repitió el experimento de Hess ascendiendo hasta una altura de unos 9 km y midió niveles de ionización aún más altos. Se llegó a la conclusión que constantemente está ingresando radiación ionizante a nuestra atmósfera desde el espacio exterior.

El descubrimiento de los rayos cósmicos abrió camino a un estudio intensivo de la física de partículas y hasta los años '50 representaron la única fuente de partículas de energía lo suficientemente alta como para crear nuevas partículas mediante interacciones y decaimientos. Se comenzó a estudiar tanto estos mecanismos como la diversidad de partículas que son creadas a través de ellos. Con los avances en la tecnología se fueron construyendo aceleradores de partículas cada vez más potentes que posibilitan estudiar de manera más controlada las interacciones entre partículas. Sin embargo la energía hasta la cual estos aceleradores son capaces de acelerar una partícula está varios ordenes de magnitud por debajo de la energía máxima observada en rayos cósmicos. Por lo tanto, éstos continúan siendo hasta hoy en día la

única fuente de información acerca de las interacciones a las más altas energías [1]. Además hay un enigma relacionado con los rayos cósmicos que aún no está resuelto. Se trata de las fuentes que los originan y los mecanismos de aceleración que hacen posible la existencia de rayos cósmicos de tan altas energías como las que se han observado [1].



Figura 1.1: Esquema simplificado y resumido de una lluvia atmosférica extendida.

En su recorrido a través de nuestra atmósfera, los rayos cósmicos que ingresan a la misma desde el espacio (a los cuales llamaremos *primarios* o *partículas primarias*) interactúan con los núcleos presentes en la misma provocando en una sucesión de colisiones una gran cantidad de *partículas secundarias*. Éstas pueden nuevamente interactuar con partículas del medio o también pueden producir nuevas partículas al decaer. Esta cascada de reacciones es conocida como *cascada* o *lluvia atmosférica extendida* [6]. El fenómeno fue descubierto por Bruno Rossi en 1934 al realizar estudios con rayos cósmicos con detectores separados unos de otros. Se percató que en los diversos detectores incidían partículas simultáneamente. Dedujo que los acontecimientos simultáneos se debían a un único gran evento, a una lluvia atmosférica extendida [6]. En la figura 1.1 se puede ver un esbozo simplificado y resumido de una lluvia atmosférica extendida. Como se puede ver en él de manera esquemática, en las cascadas el momento transversal de los secundarios que emergen de las colisiones y los procesos de dispersión provocan que el conjunto de las partículas de la cascada se extienda lateralmente a medida que la cascada avanza en el medio. Típicamente una lluvia ocasionada por un primario de alta energía puede dejar al nivel del suelo una 'huella' de unos pocos kilómetros cuadrados.

El espectro de energía de los rayos cósmicos se extiende sobre 14 órdenes de magnitud,

desde los 10^6 eV hasta los 10^{20} eV y se lo puede apreciar en la figura 1.2 para energías superiores a 10^{11} eV [1]. Allí está graficado el flujo de rayos cósmicos multiplicado por E^2 para destacar la forma del espectro. Su obtención se basa en la combinación de diversos proyectos de investigación que también están listados en la figura. Como se puede observar, la curva tiene la forma de una ley de potencias que presenta tres atributos distintivos: la *rodilla* a un poco más de 10^{15} eV, el *tobillo* a unos 3×10^{18} eV y la *supresión* por encima de los 3×10^{19} eV. Estas denominaciones pintorescas surgieron por la semejanza del espectro con una piedad. El espectro de rayos cósmicos por debajo de la rodilla es regido por una ley de potencias $E^{-\alpha}$ con índice espectral $\alpha = 2,7$. Por encima de la rodilla el índice espectral es más alto y vale aproximadamente $\alpha = 3$. Más allá del tobillo y antes de la supresión el espectro se parece de nuevo al que se presenta antes de la rodilla.

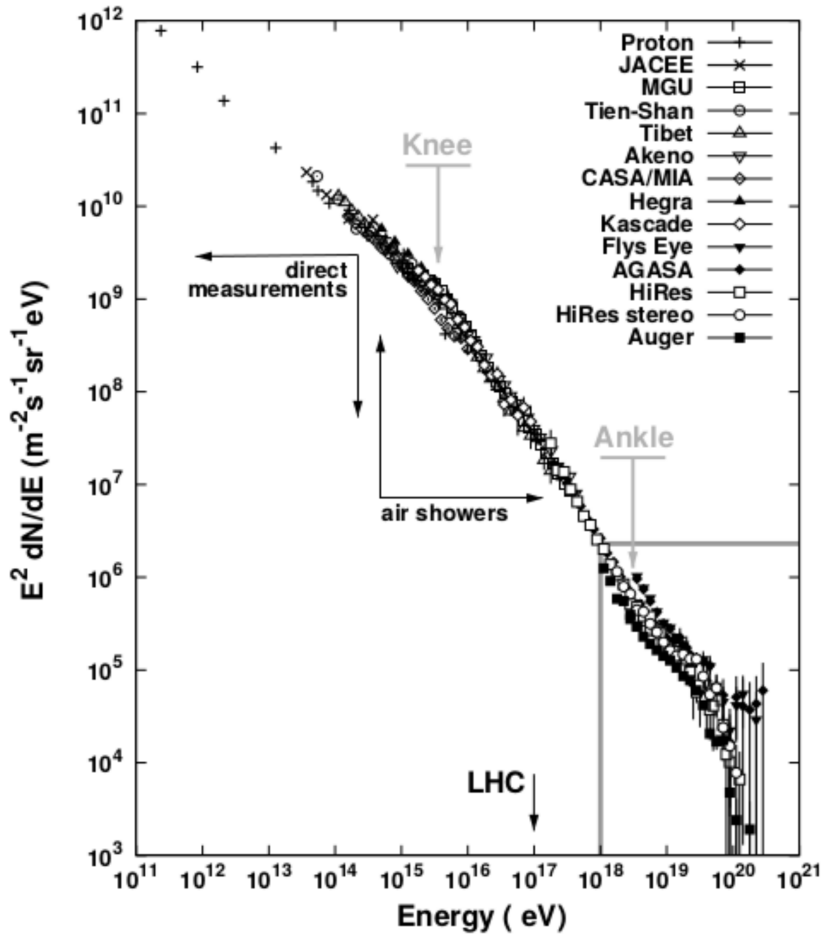


Figura 1.2: Espectro diferencial de rayos cósmicos de energía por encima de 10^{11} eV multiplicado por E^2 [1]. Están resaltadas las posiciones de la *rodilla* y el *tobillo* y las regiones de energía en las cuales se presentan datos obtenidos mediante mediciones directas o el estudio de lluvias atmosféricas extendidas, respectivamente. Los diferentes experimentos que aportan datos para esta gráfica están expuestos en la esquina superior a la derecha y la energía equivalente de laboratorio a la cual se puede acceder en el *Large Hadron Collider* está señalada.

Antes de la rodilla el flujo, es decir el número $N(> E)$ de partículas con energía ma-

yor que E , decae en un factor 50 cuando la energía se incrementa en un orden de magnitud mientras que luego de la rodilla el factor vale alrededor de 100. Concretamente, por ejemplo, el flujo de rayos cósmicos por encima de 10^{20} eV de energía es de aproximadamente una partícula por km^2 y milenio. Es por esta disminución dramática del flujo a altas energías que, para que sea factible detectar rayos cósmicos de muy alta energía con una probabilidad razonable, se construyeron arreglos de detectores que cubren cientos de kilómetros cuadrados como el Observatorio Pierre Auger.

1.2. Observatorio Pierre Auger

Las lluvias atmosféricas extendidas son uno de los procesos físicos más complejos en el área de la física de partículas. A pesar de disponer de tecnologías avanzadas hoy en día aún es imposible recrearlas experimentalmente para estudiarlas y luego sacar conclusiones acerca de las interacciones fundamentales subyacentes. Por esta razón dependemos para su estudio de instalaciones como el Observatorio Pierre Auger [2]. Éste es el observatorio de rayos cósmicos más grande del mundo y se encuentra en una llanura próxima a la localidad de Malargüe, en la provincia de Mendoza, a unos 1475 metros sobre el nivel del mar. Este detector híbrido comprende un arreglo de 1660 detectores Cherenkov en agua que cubren una superficie de más de 3000 km^2 y se complementan con 27 telescopios de fluorescencia atmosférica. Se busca explicar los mecanismos de aceleración que permiten la existencia de partículas tan energéticas como las que se han detectado, el objeto astrofísico y características del mismo en el cual fueron originadas y de qué modo se propagan en el medio galáctico e intergaláctico.

Los detectores Cherenkov detectan la luz Cherenkov emitida por las partículas cargadas relativistas que los atraviesan. Principalmente se trata aquí de electrones y positrones y de la componente muónica de las cascadas. Si bien los fotones no son partículas cargadas, si tienen suficiente energía son capaces de crear un par electrón-positrón en el interior del detector y pueden ser detectados de este modo. Como el arreglo de detectores de superficie se encuentra sobre una región bidimensional lo que se obtiene es la descripción de una sección transversal de la cascada. Analizando los tiempos de llegada a los diferentes detectores y la intensidad de luz medida en ellos es posible reconstruir la geometría de la cascada, es decir la dirección de arribo del primario.

Por otro lado, los detectores de fluorescencia, que están agrupados en 4 sitios rodeando el arreglo de detectores de superficie, responden a la luz de fluorescencia que generan las partículas de la cascada al excitar los núcleos de nitrógeno presentes en la atmósfera. Se puede decir que la atmósfera aquí cumple la función de un detector calorimétrico enorme en

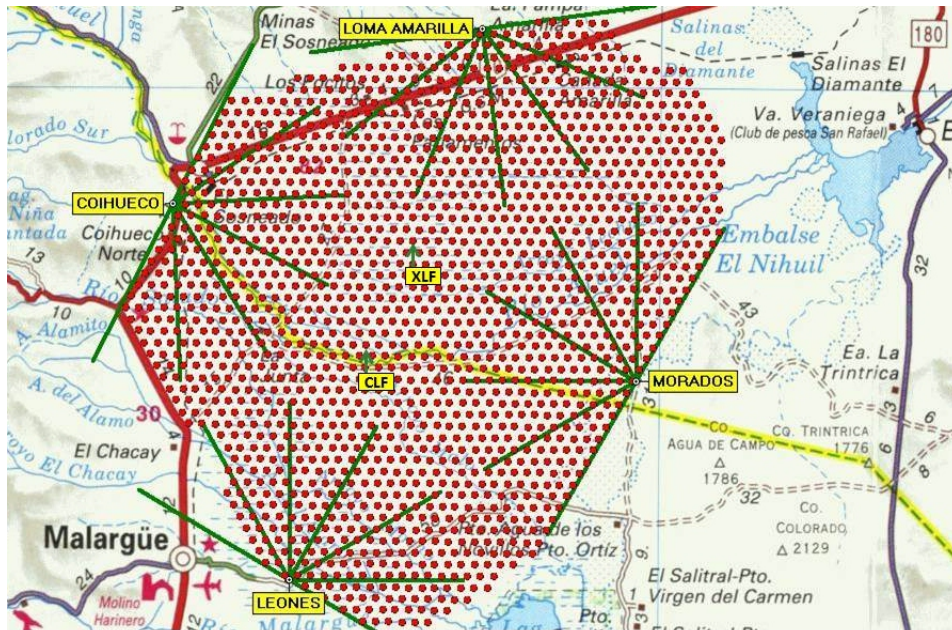


Figura 1.3: El Observatorio Pierre Auger [2], situado en las cercanías de Malargüe, Mendoza, Argentina. Cada punto rojo corresponde a uno de los 1660 detectores de Cherenkov en agua. La distancia entre dos de ellos es de 1500 metros salvo en una pequeña porción del arreglo que es de 750 metros. Se pueden ver los detectores de fluorescencia y el campo de visión de cada uno respectivamente.

el cual la lluvia deposita una parte de su energía en forma de luz de fluorescencia. Con esta información es posible reconstruir el perfil longitudinal de la cascada a medida que atraviesa la atmósfera. Como la cantidad de energía depositada en la atmósfera en forma de luz de fluorescencia es proporcional a la energía del primario se dispone así de un método directo para estimar la energía del primario. Además, los datos medidos en detectores de fluorescencia permiten determinar la profundidad a la cual se alcanzó el número máximo de partículas, X_{max} , que a su vez representa uno de los indicadores más confiables para determinar de manera estadística la composición de los rayos cósmicos.

La naturaleza híbrida del Observatorio Pierre Auger es esencial a la hora de interpretar eventos de alta energía. Una de las ideas detrás de este método es medir las mismas características de interés de los primarios pero con diferentes métodos que tienen incertezas sistemáticas distintas. Al mismo tiempo cada medición puede proveer información específica por sí misma. Como describiremos en seguida de forma resumida, el conjunto de los detectores de superficie y el de los detectores de fluorescencia se complementan al registrar ambos el mismo evento pero respondiendo a distinto tipo de estímulo.

La composición química de los rayos cósmicos de alta energía es una información clave a la hora de dilucidar su origen [7, 8]. Nos referimos particularmente a rayos cósmicos de alta energía pues las trayectorias de los de menor energía se ven altamente influenciadas por los campos magnéticos galácticos y extragalácticos por lo cual se hace imposible determinar

la dirección del objeto astronómico en el cual fueron originados.

Un parámetro estándar que se analiza para extraer de datos de medición información acerca de la composición es la profundidad atmosférica a la cual el desarrollo longitudinal de la cascada alcanza el número máximo de partículas, X_{max} . La razón cualitativa es que, para una energía primaria dada, diferentes núcleos que generan cascadas en nuestra atmósfera producen diferentes distribuciones de la profundidad X_{max} . Estas fluctuaciones cascada a cascada se deben a la naturaleza estocástica de los procesos de interacción y especialmente a la posición estocástica de la primera interacción. Más precisamente, dado que estas fluctuaciones están presentes, los parámetros más esenciales para estudiar la composición son el promedio de la profundidad X_{max} y su dispersión. Se realizaron trabajos para inferir la composición utilizando el promedio y la dispersión de X_{max} aprovechando que el promedio se comporta de manera lineal con respecto al logaritmo de la masa atómica [7, 8]. Esta clase de trabajos está sujeta a incertezas ya que las predicciones dependen de diferentes suposiciones relacionadas con el modelo de interacciones hadrónicas. Los datos recolectados en el Observatorio Pierre Auger son particularmente adecuados para este tipo de estudio ya que, como veremos brevemente en la siguiente sección, este experimento híbrido es capaz de medir la profundidad X_{max} con una precisión sumamente alta.

1.3. La componente electromagnética

Es usual agrupar las partículas creadas a lo largo de una lluvia atmosférica extendida en 3 componentes: la componente electromagnética (EM), que comprende electrones, positrones y fotones, la componente muónica y la componente hadrónica [6]. En la figura 1.4 está visualizada una lluvia atmosférica extendida dividida en sus tres componentes.

Como vimos en la sección anterior la componente electromagnética cumple un rol sumamente importante al momento de interpretar los datos obtenidos en mediciones de eventos en el Observatorio Pierre Auger. Pero esta no es la única razón. Visto de manera más general, en cascadas que ya están en una etapa de desarrollo avanzada la componente EM es la que comprende la mayor fracción de partículas generadas durante la misma [1]. Esto se puede observar por ejemplo en la gráfica 1.5 que corresponde a una simulación que se realizó con un protón primario de 10^{19} eV de energía. La gráfica muestra las distribuciones de los tipos de partículas más representados a nivel del suelo. Como se puede ver, la cantidad de electrones y positrones junto con el número de fotones representan la mayoría de las partículas que alcanzan el nivel del suelo (comprenden aproximadamente un 84 % de las partículas) siendo la cantidad de fotones la más abundante. Más adelante estudiaremos esta gráfica más en

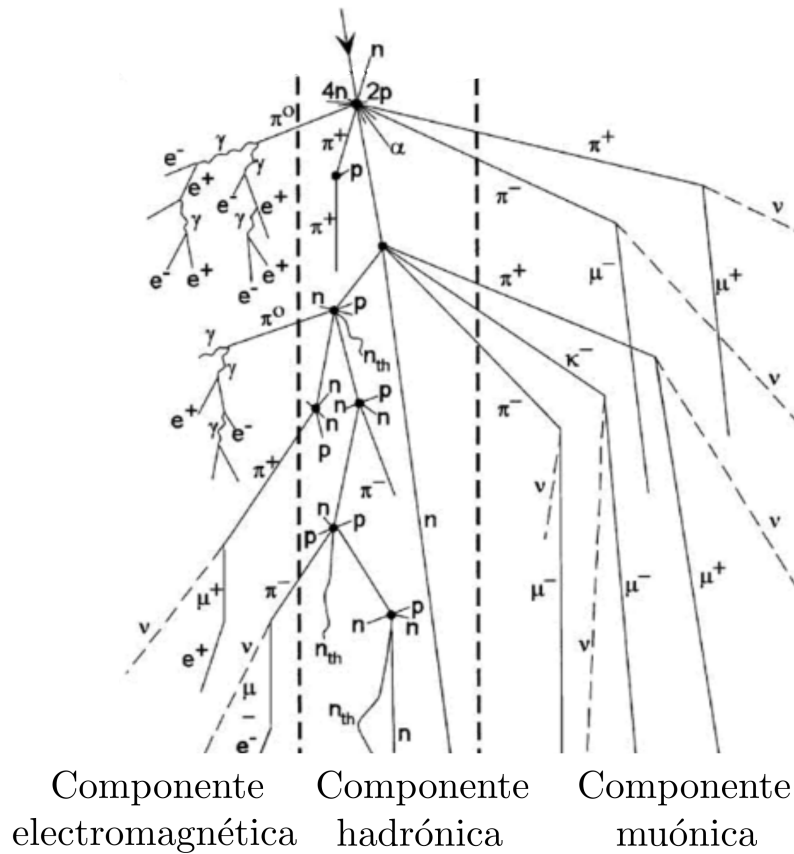


Figura 1.4: Esquema de las componentes electromagnética, hadrónica y muónica de una lluvia atmosférica extendida.

detalle. Por lo tanto los procesos electromagnéticos son de alta importancia en la evolución y el estudio de las cascadas generadas por rayos cósmicos. Cabe destacar que en cuanto a la señal que producen las partículas en los detectores de Cherenkov, cerca del eje de la cascada la señal está dominada por la componente electromagnética (EM) pero para detectores cada vez más alejados del eje de la cascada domina más y más la componente muónica.

En cascadas iniciadas por un hadrón la mayor contribución a la componente EM se la atribuye a los piones neutros que a su vez surgen de colisiones hadrónicas [9]. Éstos, casi inmediatamente después de haber sido creados, decaen a dos fotones:

$$\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma.$$

Estos fotones representan cada uno el comienzo de una subcascada EM. La suma de todas estas subcascadas EM abarca la componente EM. Para el incremento en la cantidad de partículas en estas subcascadas (como también lo sería para una cascada cuyo primario es un electrón o un fotón) los procesos más relevantes son la creación de pares ocasionada por los fotones

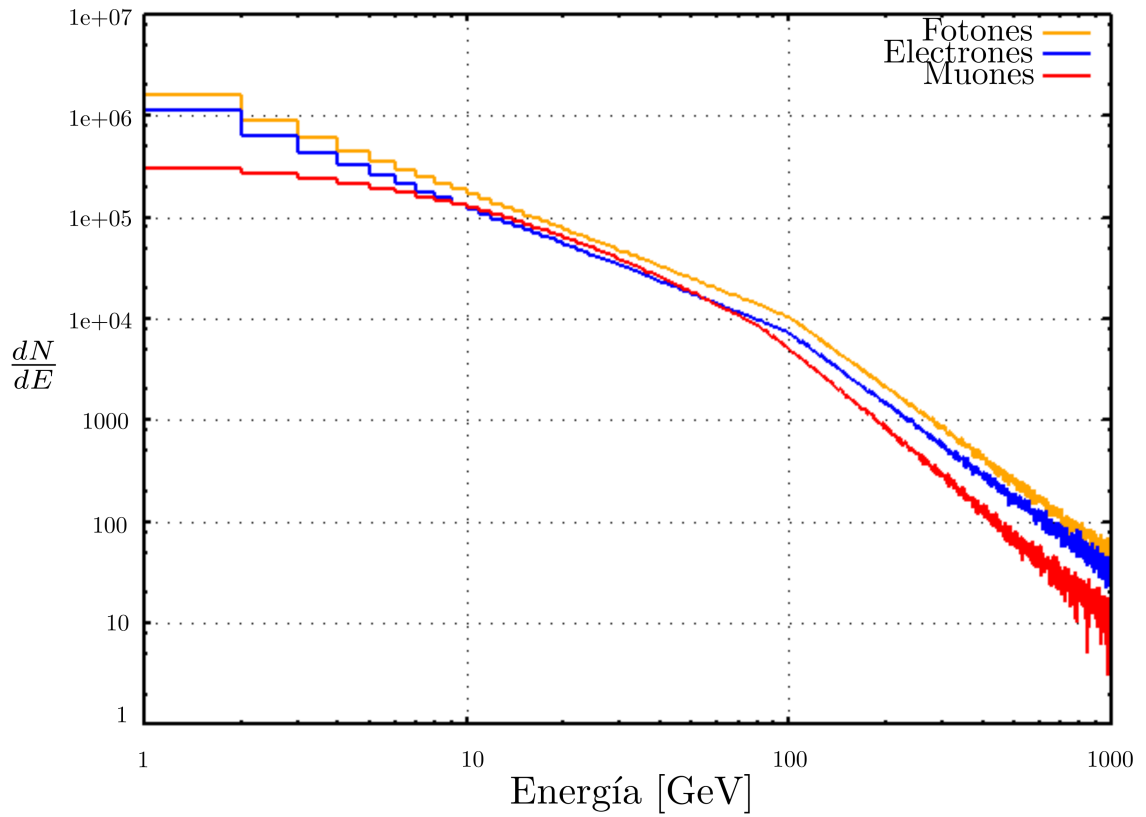


Figura 1.5: Distribuciones de los fotones, electrones y muones que alcanzan el nivel del suelo (éstas son las partículas más representadas a ese nivel) para una simulación realizada con CORSIKA e inicializada con un protón de 10^{19} eV de energía. Se puede observar la preponderante proporción que representa la componente electromagnética entre las partículas que llegan al suelo.

y la radiación de frenado provocada por los electrones:

$$\gamma \xrightarrow{A_Z X} e^+ + e^-,$$

$$e \xrightarrow{A_Z X} e + \gamma.$$

En las expresiones anteriores $A_Z X$ representa el núcleo (de número atómico A y carga Z) presente en el medio que hace posible esta interacción. En la segunda expresión se puede tratar indistintamente de un electrón o de un positrón.

El decaimiento de muones y otras partículas cargadas también puede desviar energía hacia la componente EM en forma de electrones [4]. Pero estos procesos infunden notablemente menos energía en ella por lo que no se los tiene en cuenta en modelos analíticos que describen la evolución de la componente EM. Sin embargo, en programas que simulan el desarrollo de lluvias atmosféricas extendidas estos procesos sí son considerados.

A medida que el número de partículas crece también decrece la energía promedio de las

mismas y a energías bajas predomina la disipación de energía por ionización de los constituyentes atmosféricos [10]. Por lo tanto, a partir de un cierto momento el número de partículas comienza a disminuir.

Vamos a presentar brevemente un modelo sencillo del desarrollo de cascadas electromagnéticas (o sea, de cascadas cuyos primarios fueron un electrón o un fotón) que propuso el físico alemán Walter Heitler [3] antes de que existieran computadoras con suficiente capacidad como para realizar simulaciones de lluvias atmosféricas extendidas. En su modelo describe la cadena de procesos sucesivos recién descriptos (Bremsstrahlung y creación de pares) como un árbol binario perfecto, como el que se puede observar en la figura 1.6, en el que luego de cada etapa las partículas interactúan creando dos partículas de igual energía. En este modelo se asume que las secciones eficaces son independientes de la energía y se desprecia la dispersión lateral y angular de los secundarios.

Cada etapa representa el avance de las partículas en una profundidad $d = \lambda_r \ln 2$ donde λ_r es la longitud de radiación del medio en el que se propagan los secundarios y que definiremos a comienzos del capítulo 2. Después de n pasos el número total de partículas es $N_n = 2^n$. Con el aumento en la cantidad de partículas decrece la energía promedio de cada una de ellas. Cuando esta energía (que es la misma para electrones y fotones en este modelo simplificado) alcanza valores menores que ξ_c^e , que W. Heitler define como la energía a la cual la tasa de pérdida de energía por ionización en promedio es igual a la tasa de pérdida de energía por Bremsstrahlung y denomina *energía crítica*, los procesos multiplicativos dejan de ocurrir. En este punto la cascada alcanzó el número máximo de partículas. En modelos que desarrollaremos más adelante emplearemos otra definición de energía crítica que presentaremos en el momento apropiado.

La cascada alcanza el número máximo de partículas N_{max} cuando la energía del primario E_0 está distribuida entre todas las partículas de manera que la energía de cada una de ellas es ξ_c^e . Por lo tanto $E_0 = \xi_c^e N_{max}$. Hemos llegado a una de las características más importantes de las cascadas electromagnéticas que es que la cantidad máxima de partículas es proporcional a la energía del primario:

$$N_{max} \propto E_0.$$

Por otro lado si llamamos n_c al número de pasos necesarios para que las partículas tengan energía ξ_c^e tenemos que $N_{max} = 2^{n_c}$. Combinando esta ecuación con la relación que hay entre N_{max} y E_0 obtenemos que $n_c = \ln(E_0/\xi_c^e)/\ln 2$ y así llegamos a otra de las propiedades esenciales de las lluvias. La profundidad atmosférica a la cual la cascada alcanza el máximo es

$$X_{max} = n_c d = n_c \lambda_r \ln 2 = \lambda_r \ln \left(\frac{E_0}{\xi_c^e} \right).$$

Es decir, la profundidad a la cual se alcanza el máximo es logarítmicamente proporcional a la energía del primario.

Es sorprendente que las conclusiones a las que lleva el modelo de W. Heitler, que parte de suposiciones tan sencillas, pueden ser verificadas mediante simulaciones de manera cualitativa. Sin embargo, el número de partículas presentes en el máximo del desarrollo de la cascada en el modelo supera al que se obtiene en simulaciones por un factor de entre 2 y 3. En los próximos dos capítulos desarrollaremos modelos que involucren más procesos físicos y herramientas analíticas más sofisticadas y que cuantitativamente reflejan mejor la evolución de lluvias atmosféricas extendidas.

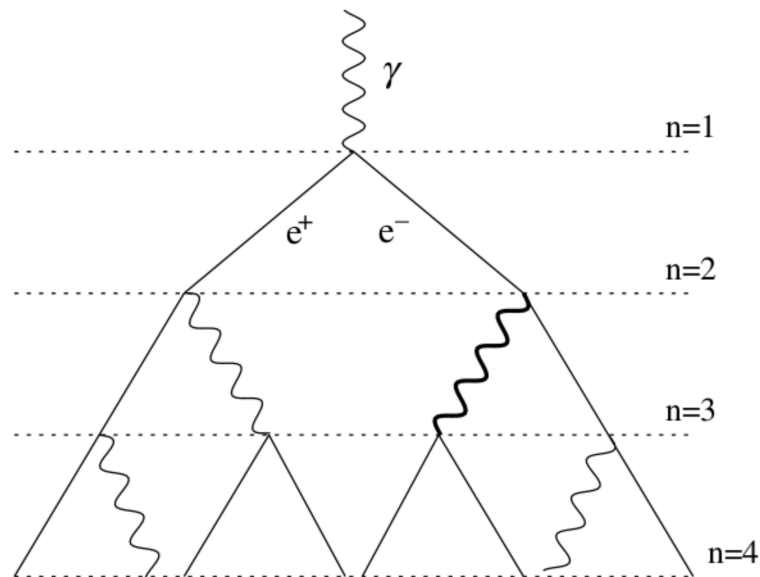


Figura 1.6: Esquema simplificado del desarrollo de una cascada electromagnética [3]. Las hipótesis de W. Heitler son que luego que la cascada avanzó una cierta distancia d los fotones producen un par electrón-positrón y los electrones emiten un fotón debido al proceso de Bremsstrahlung y que en estos procesos la energía se divide equitativamente entre sus productos.

Capítulo 2

Las ecuaciones de difusión

2.1. Procesos elementales

Al atravesar un material una partícula cargada pierde energía al colisionar con los electrones de los átomos del material y expulsándolos o al excitar los átomos. Resumimos estos procesos bajo el nombre de *pérdida de energía por ionización*. Se mostró que para partículas cargadas relativistas la tasa de pérdida de energía por ionización es casi independiente de su energía [10]. Además la trayectoria de partículas cargadas que pasan cerca de un núcleo se ve afectada por el campo de Coulomb del mismo. La partícula es deflectada y de este modo desacelerada por lo que emite un fotón. Este proceso de radiación se denomina *Bremsstrahlung* y fue demostrado que la pérdida de energía por medio de este proceso es proporcional a la energía de la partícula. Esto significa que para partículas cargadas a altas energías predomina la pérdida de energía por radiación y a bajas energías la pérdida de energía por ionización se torna más importante.

El proceso más relevante mediante el cual pierden energía los fotones que atraviesan un medio es la *creación de pares*. En este proceso el fotón se convierte en un par electrón-positrón. Notemos que para que este proceso sea cinemáticamente posible el fotón debe tener suficiente energía (mínimamente $2m_e = 1022 \text{ keV}$) y pasar cerca de un núcleo del medio.

2.2. Definiciones y secciones eficaces de los procesos elementales

Se puede mostrar [11] que la pérdida de energía de un electrón por unidad de profundidad causada por el proceso de Bremsstrahlung es aproximadamente

$$-\frac{dE}{dX} = X_0^{-1} E \quad (2.1)$$

donde E es la energía, X es la profundidad y X_0 es la denominada *longitud de radiación*. En esta expresión se reconoce la utilidad de trabajar en términos de profundidad por unidad de longitud de radiación:

$$t = \frac{X}{X_0}.$$

X y X_0 vienen dadas en $\frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$ por lo que t es un número. Empleando la profundidad normalizada, la ecuación 2.1 se convierte en $\frac{dE}{dt} = -E$. En aire (composición: N 75.52 %, O 23.24 %, Ar 1.3 %) la longitud de radiación vale cerca de $37.1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$ o equivalentemente para la atmósfera terrestre 308 m al nivel del mar.

Si además del proceso de radiación se tiene en cuenta la pérdida de energía por ionización, recordando que a altas energías ésta es casi independiente de la energía, la tasa de pérdida de energía de un electrón toma la forma

$$\frac{dE}{dt} = -(E + \varepsilon).$$

Aquí ε es la pérdida de energía por ionización de un electrón al atravesar una longitud de radiación de un material y se denomina *energía crítica*. Este parámetro asume valores diferentes para cada material. En particular para el aire vale alrededor de 81 MeV.

Por un lado, si $\psi\left(\frac{E'}{E}\right) \frac{dE'}{E}$ es la probabilidad de que un fotón de energía E que atraviesa un espesor de X_0 produzca un par electrón-positrón de manera tal que el positrón se lleve una fracción entre u y $u + du$ de la energía del fotón, es decir $E' = uE$, entonces [10]

$$\psi(u) = \left(u^2 + (1-u)^2 + \left(\frac{2}{3} - 2b \right) u(1-u) \right).$$

El parámetro b únicamente depende del número atómico Z del medio que es atravesado:

$$b = \frac{1}{18 \ln(183Z^{-\frac{1}{3}})}$$

y si el medio es aire vale $b \cong 0,012$. Por otro lado, siendo $\phi\left(\frac{E'}{E}\right) \frac{dE'}{E}$ la probabilidad de que un electrón de energía E que atraviesa un espesor de X_0 emita un fotón de energía entre E' y $E' + dE'$, donde $E' = vE$, se tiene que [10]

$$\phi(v) = \left(1 + (1-v)^2 - (1-v) \left(\frac{2}{3} - 2b \right) \right) \frac{1}{v}.$$

En ambos casos se considera que el apantallamiento del campo del núcleo por parte de los electrones externos es total (al final de este capítulo definiremos más formalmente el concepto de apantallamiento total). Notemos que estas funciones sólo tienen sentido para valores

de u y v , respectivamente, entre 0 y 1 por lo que las podemos definir nulas para cualquier otro valor. Más adelante nos será de utilidad la probabilidad por longitud de radiación de que ocurra creación de pares:

$$\sigma_0 = \int_0^1 \psi(u) du = \frac{7}{9} - \frac{b}{3}.$$

En lo que sigue haremos uso de las siguientes expresiones. El *espectro diferencial de los electrones* $\pi(E, t)dE$ es el número promedio de electrones y positrones a una profundidad t que tienen energía entre E y $E + dE$. A veces se escribe $\pi(E_0, E, t)dE$ para aclarar que la energía de la partícula primaria fue E_0 . De manera equivalente se define el *espectro diferencial de los fotones* $\gamma(E, t)dE$. También recurriremos al *espectro integral de los electrones* $\Pi(E, t) = \int_E^\infty \pi(E', t)dE'$ y al *espectro integral de los fotones* $\Gamma(E, t) = \int_E^\infty \gamma(E', t)dE'$.

2.3. Aproximación A

La aproximación A se aplica a energías altas comparadas con la energía crítica del medio atravesado ya que de este modo se puede despreciar el efecto de pérdida de energía por ionización [9, 11]. Además las energías deben ser lo suficientemente altas como para poder aplicar las expresiones de las secciones eficaces que valen en el caso de apantallamiento total, es decir, las presentadas en la sección anterior. A energías altas la dispersión debida a procesos de Compton también es despreciable por lo que, en definitiva, en la aproximación A sólo se consideran los procesos de Bremsstrahlung y creación de pares.

Vamos a comenzar describiendo el modo en que varía el número de electrones en su recorrido a través de una profundidad Δt . Electrones que tienen energía entre E y $E + dE$ pierden energía durante el proceso de Bremsstrahlung y son desplazados a regiones de energías menores por lo que el número de electrones que se debe restar de este intervalo de energía es

$$\pi(E, t) \int_0^E \varphi\left(\frac{E'}{E}\right) \frac{dE'}{E} \Delta t.$$

Naturalmente también electrones de energías más altas que E sufren pérdida de energía por Bremsstrahlung y pueden acabar en el intervalo $(E, E + dE)$. Por lo tanto al valor $\pi(E, t)$ se le debe sumar

$$\int_0^\infty \pi(E + E', t) \varphi\left(\frac{E'}{E + E'}\right) \frac{dE'}{E + E'} \Delta t.$$

Resumiendo, el cambio neto del número de electrones por unidad de profundidad (en unida-

des de longitud de radiación) a causa del efecto de Bremsstrahlung es:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\pi}{dt} \right|_{Brems} &= - \int_0^\infty \left[\pi(E, t) \varphi \left(\frac{E'}{E} \right) - \pi(E + E', t) \varphi \left(\frac{E'}{E + E'} \right) \frac{E}{E + E'} \right] \frac{dE'}{E} \\ &= - \int_0^1 \left[\pi(E) - \frac{1}{1-v} \pi \left(\frac{E}{1-v} \right) \right] \varphi(v) dv =: -A' \pi \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde A' es el operador que describe la variación de π debido al proceso de Bremsstrahlung. El segundo término de la última igualdad se justifica haciendo el cambio de variables $\frac{E'}{E+E'} = v$ y notando que esto equivale a $E + E' = \frac{E}{1-v}$ e implica que $\frac{dE'}{E+E'} = \frac{dv}{1-v}$.

La cantidad de electrones también se ve afectada por lo que les ocurre a los fotones. Fotones de energías más altas que E pueden producir electrones de energías entre E y $E + dE$ al crear un par electrón-positrón. Este número por unidad de profundidad es

$$\left. \frac{d\pi}{dt} \right|_{Par} = 2 \int_0^\infty \gamma(E + E', t) \psi \left(\frac{E}{E + E'} \right) \frac{dE'}{E + E'} = 2 \int_0^1 \gamma \left(\frac{E}{u} \right) \psi(u) \frac{du}{u} =: B' \gamma \quad (2.3)$$

donde ahora B' es el operador que describe la variación de π debido a la creación de pares por parte de los fotones. Notemos que aquí estamos suponiendo que tanto el electrón como el positrón terminan teniendo la misma energía de interés.

Continuemos con la descripción de la manera en que se modifica el número de fotones durante su pasaje a través de una profundidad Δt . Un fotón de energía E al producir un par electrón-positrón deja de existir por lo que la cantidad de fotones de esta energía se disminuye en

$$\left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{Par} = \gamma(E, t) \int_0^E \psi \left(\frac{E'}{E} \right) \frac{dE'}{E} = \gamma(E, t) \int_0^1 \psi(u) du = \gamma(E, t) \sigma_0 \quad (2.4)$$

por unidad de profundidad.

Asimismo puede ocurrir que un electrón de energía más alta que E emita un fotón con energía entre E' y $E' + dE'$. Este proceso contribuye en una longitud de radiación con

$$\left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{Brems} = \int_0^\infty \pi(E + E', t) \varphi \left(\frac{E}{E + E'} \right) \frac{dE'}{E + E'} = \int_0^1 \pi \left(\frac{E}{v}, t \right) \varphi(v) \frac{dv}{v} =: C' \pi. \quad (2.5)$$

Resumiendo las expresiones dadas en 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5 obtenemos las ecuaciones de difusión en la aproximación A:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial t} = -A'\pi + B'\gamma \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\sigma_0\gamma + C'\pi \end{cases} \quad (2.6)$$

Recordemos que las soluciones de estas ecuaciones son válidas únicamente a altas energías. Esto se torna particularmente importante si notamos que no tuvimos en cuenta ningún proceso que origine disipación de energía. Esto significa que en este modelo el número de partículas crece indefinidamente.

2.4. Aproximación B

El próximo paso es extender la aproximación A agregando el efecto de la pérdida de energía por ionización. A esta aproximación en la que se tienen en cuenta los efectos de Bremsstrahlung, creación de pares e ionización del medio se la denomina *aproximación B* [9, 11]. Los procesos ya descritos en la sección anterior siguen siendo tratados de la misma manera. Veremos ahora como implementar el efecto de la pérdida de energía por ionización en el modelo ya desarrollado recordando que este efecto es dominante a energías por debajo de la energía crítica.

La energía que pierden los electrones al ionizar el medio o al colisionar con las partículas del mismo es $\varepsilon\Delta t$ donde Δt es la profundidad atravesada. Electrones que alcanzan la profundidad $t + \Delta t$ con energía entre E y $E + dE$ tuvieron a la profundidad t una energía entre $E + \varepsilon\Delta t$ y $E + dE + \varepsilon\Delta t$. Por lo tanto $\pi(E, t + \Delta t) = \pi(E + \varepsilon\Delta t, t)$. Entonces la cantidad de electrones se ve modificada por el efecto de la ionización del siguiente modo:

$$\Delta\pi = \pi(E, t + \Delta t) - \pi(E, t) = \pi(E + \varepsilon\Delta t, t) - \pi(E, t) = \varepsilon \frac{\partial \pi(E, t)}{\partial E} \Delta t. \quad (2.7)$$

Por lo tanto, añadiendo el efecto dado en 2.7 al sistema de ecuaciones integro-diferenciales 2.6, las ecuaciones de difusión en la aproximación B son:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial t} = -A'\pi + B'\gamma + \varepsilon \frac{\partial \pi}{\partial E} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\sigma_0\gamma + C'\pi. \end{cases} \quad (2.8)$$

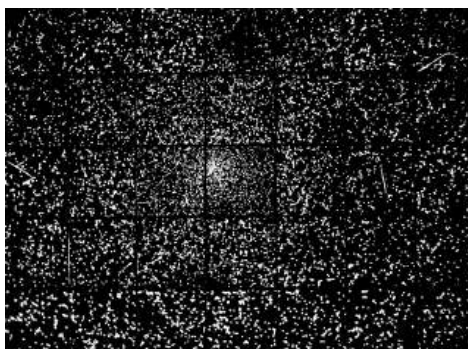
2.5. Teoría tridimensional con la aproximación de Landau

Hasta ahora supusimos que todas las partículas secundarias siguen la dirección de propagación del primario. Sin embargo, esto representa una simplificación considerable de la realidad. Por un lado, en los procesos de creación de pares y de Bremsstrahlung, el ángulo de apertura entre las partículas generadas durante estos procesos hace que las partículas se desvíen de la dirección de la partícula que las originó. Pero estos ángulos de dispersión se consideran en general despreciables frente a las deflexiones que sufren los electrones al acercarse a los campos de Coulomb de los núcleos presentes en el medio. Este último efecto sí tiene impacto sobre la estructura de lluvias atmosféricas extendidas [11].

En la figura 2.1a se puede observar la fotografía de una sección transversal de una lluvia detectada por un arreglo de 35 cámaras de descarga de entre 1 y 2 m² cada uno que se encuentra en la Universidad de Leeds en Inglaterra. La región que contiene la mayor densidad de partículas corresponde aproximadamente al punto en el que el eje de la cascada atraviesa el plano detector. Podemos observar que a medida que nos alejamos de este punto la densidad de partículas disminuye y las trazas que las partículas dejan en la fotografía son más largas, lo cual indica que la dirección de propagación de estas partículas está inclinada respecto al eje de la cascada. Esto a su vez es evidencia de la dispersión lateral de las lluvias. Teniendo en cuenta el tamaño del arreglo de detectores, se concluye que la expansión de la región que atraviesan los secundarios no es despreciable. Este mismo efecto también se puede apreciar en la imagen lateral registrada por una cámara de niebla mostrada en la figura 2.1b.

Por lo tanto es evidente que va a ser de utilidad construir una teoría tridimensional y lo haremos a partir de la teoría unidimensional ya desarrollada añadiéndole el efecto de la dispersión de Coulomb. Ahora los espectros que nos interesan dependerán no sólo de la energía E y la profundidad t sino también del ángulo que la trayectoria de las partículas forman con respecto al eje de la cascada y de la distancia al mismo.

El eje de la cascada se define como la recta cuya dirección coincide con la dirección de propagación del primario antes de interactuar con la atmósfera. Como se puede ver en la figura 2.2, θ es el ángulo que forma la recta que corresponde a la dirección de propagación de la partícula en estudio con el eje de la cascada, y ϕ es el ángulo que forma la proyección del vector de propagación de la partícula sobre un plano perpendicular al eje de la cascada con un eje x previamente definido, que únicamente cumple la función de ser un eje de referencia. Sea ahora $\pi(E, \bar{r}, \bar{\theta}, t) dE d\bar{r} d\bar{\theta}$ el número promedio de electrones de energía entre E y $E + dE$ que se propagan formando un ángulo entre $\bar{\theta}$ y $\bar{\theta} + d\bar{\theta}$ con el eje de la cascada y que se encuentran en una posición entre \bar{r} y $\bar{r} + d\bar{r}$ y a profundidad t . Aclaremos aquí que $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ y $\bar{r} = (x, y)$. De manera equivalente, se define el espectro diferencial



(a) Fotografía de una sección transversal de una lluvia atmosférica extendida. La imagen que crean las partículas al atravesar el arreglo de detectores comprende una evidencia de la dispersión lateral de las cascadas [12].



(b) Imagen lateral de una cascada registrada por una cámara de niebla a 3027 metros de altura [13]. Se estima que el primario fue un protón de 10 GeV de energía y se supone que la primer interacción ocurrió en la primer placa.

Figura 2.1: Experimentos relacionados con la física de rayos cósmicos que reflejan el efecto de la extensión lateral de las cascadas.

$\gamma(E, \bar{r}, \bar{\theta}, t) dE d\bar{r} d\bar{\theta}$ de los fotones y de manera análoga se adaptan las definiciones de los espectros integrales de la teoría unidimensional.

Consideremos ahora las variaciones lateral y angular de los electrones al ser deflectados por los campos de Coulomb de los núcleos del medio. Sea $\sigma(\bar{\theta}) d\bar{\theta}$ la probabilidad de que un electrón sea dispersado un ángulo entre $\bar{\theta}$ y $(\bar{\theta} + d\bar{\theta})$ de su dirección original al haber atravesado una unidad de profundidad. Cuando la cascada avanza de una profundidad t a una profundidad $(t + dt)$, a causa de la dispersión de Coulomb una cierta cantidad de electrones pasan de formar cualquier ángulo a formar un ángulo $\bar{\theta}$ mientras que los que originalmente formaban un ángulo $\bar{\theta}$ van a cambiar de dirección. La descripción de este efecto sobre el

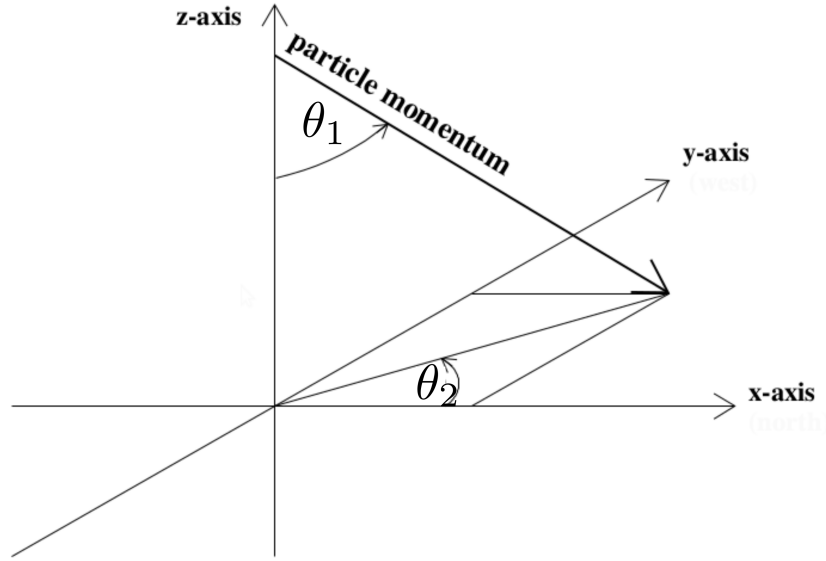


Figura 2.2: Esquema que muestra de qué manera se definen los ángulos θ y φ y las coordenadas x e y en relación con el eje de la cascada.

número de electrones viene dada por:

$$\left. \frac{d\pi}{dt} \right|_{Coulomb} = \int \sigma(\bar{\theta} - \bar{\theta}') \pi(\bar{\theta}', t) d\bar{\theta}' - \int \sigma(\bar{\theta}') d\bar{\theta}' \pi(\bar{\theta}, t) =: \sigma' \pi. \quad (2.9)$$

Aquí las integrales recorren todos los ángulos posibles.

Además, ahora que estamos considerando que los electrones pueden ser deflectados, también los fotones generados por ellos van a propagarse en direcciones diferentes a la del eje de la cascada. Asimismo, a medida que todos ellos (tanto fotones como electrones) se propagan a través del medio, sufren desplazamientos laterales por el sólo hecho de estar propagándose en una dirección diferente a la del primario. Un electrón o un fotón que se halla en una posición entre \bar{r} y $(\bar{r} + d\bar{r})$ que se propaga formando un ángulo entre $\bar{\theta}$ y $(\bar{\theta} + d\bar{\theta})$ con el eje de la lluvia y atraviesa una profundidad dt experimenta un desplazamiento lateral $\bar{\theta} dt$ (pues suponemos que se trata de ángulos pequeños). Esto implica que una partícula que se encuentra a una profundidad t en una posición entre \bar{r} y $(\bar{r} + d\bar{r})$ pasa a estar en una posición entre $(\bar{r} + \bar{\theta} dt)$ y $(\bar{r} + d\bar{r} + \bar{\theta} dt)$ en la profundidad $(t + dt)$. También se puede escribir en particular para los electrones que

$$\pi(E, \bar{r}, \bar{\theta}, t + dt) = \pi(E, \bar{r} - \bar{\theta} dt, \bar{\theta}, t) = \pi(E, \bar{r}, \bar{\theta}, t) - \bar{\theta} dt \cdot \frac{\partial \pi(E, \bar{r}, \bar{\theta}, t)}{\partial \bar{r}}.$$

Por lo tanto el cambio en el número de electrones a causa del desplazamiento viene dado por

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = -\bar{\theta} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial \bar{r}}. \quad (2.10)$$

Para los fotones tendremos siguiendo los pasos de manera análoga

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\bar{\theta} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{r}} \quad (2.11)$$

Por ende, combinando la teoría unidimensional con las expresiones obtenidas en 2.9, 2.10 y 2.11, se llega a que las ecuaciones de difusión en la teoría tridimensional son

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial t} + \bar{\theta} \frac{\partial \pi}{\partial \bar{r}} = -A' \pi + B' \gamma + \sigma' \pi + \varepsilon \frac{\partial \pi}{\partial E} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \bar{\theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{r}} = -\sigma_0 \gamma + C' \pi. \end{cases}$$

Combinando los trabajos realizados principalmente por B. Rossi y K. Greisen [10] se puede simplificar un poco el término $\sigma' \pi$:

$$\begin{aligned} \sigma' \pi &= \int \sigma(\bar{\theta} - \alpha) \pi(\alpha) d\alpha - \int \sigma(\bar{\theta}') d\bar{\theta}' \pi(\bar{\theta}) \\ &= \int \sigma(-\bar{\theta}') \pi(\bar{\theta} + \bar{\theta}') d\bar{\theta}' - \int \sigma(\bar{\theta}') d\bar{\theta}' \pi(\bar{\theta}) \\ &= \int \sigma(\bar{\theta}') \pi(\bar{\theta} + \bar{\theta}') d\bar{\theta}' - \int \sigma(\bar{\theta}') d\bar{\theta}' \pi(\bar{\theta}) \end{aligned}$$

En la última igualdad hicimos uso del hecho que la probabilidad de dispersión es una función simétrica con respecto al eje de la cascada. Desarrollando $\pi(\bar{\theta} + \bar{\theta}')$ en una serie de Taylor sobre $\bar{\theta}'$ obtenemos:

$$\sigma' \pi = \int \left(\pi(\bar{\theta}) + \bar{\theta}' \cdot \nabla_{\bar{\theta}} \pi(\bar{\theta}) + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \theta_1'^2 & \theta_2'^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \pi(\bar{\theta})}{\partial \theta_1'^2} \\ \frac{\partial^2 \pi(\bar{\theta})}{\partial \theta_2'^2} \end{pmatrix} + \dots \right) \sigma(\bar{\theta}') d\bar{\theta}' - \int \pi(\bar{\theta}) \sigma(\bar{\theta}') d\bar{\theta}'. \quad (2.12)$$

El primer y el último término se cancelan. El segundo término también es 0 ya que se está integrando sobre todos los ángulos y la distribución σ es simétrica. El único término que prevalece es el tercero y se lo puede aproximar de la siguiente manera.

B. Rossi y K. Greisen desarrollaron, asumiendo una distribución de carga puntual, una expresión para la probabilidad σ [10]:

$$\sigma(\bar{\theta}) d\bar{\theta} = \frac{1}{4\pi \ln \left(181 Z^{-\frac{1}{3}} \right)} \left(\frac{E_s}{E} \right)^2 \frac{d\bar{\theta}}{\bar{\theta}^4} \quad (2.13)$$

donde Z es el número atómico del medio y E_s es la denominada *energía de apantallamiento*. A muy bajas energías de la partícula que se propaga por el medio el apantallamiento no es eficaz y puede ser despreciado pero a energías más altas éste se torna más y más eficiente (apantallamiento parcial). Se considera que el *apantallamiento es total* cuando la energía de

la partícula sobrepasa el valor de E_s que formalmente está definido como

$$E_s = \frac{m_e c^2}{\alpha Z^{-\frac{1}{3}}}$$

donde α es la constante de estructura fina [6]. Si el medio atravesado es aire E_s vale aproximadamente 21 MeV. Según E. J. Williams [14] el apantallamiento se manifiesta especialmente dentro de un cierto rango de ángulos que no son ni demasiado grandes ni demasiado pequeños:

$$\sigma(\bar{\theta})d\bar{\theta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta < \theta_{min} \\ \text{expresión dada en (2,13)} & \text{si } \theta_{min} < \theta < \theta_{max} \\ 0 & \text{si } \theta_{max} < \theta \end{cases}$$

donde los valores concretos obtenidos para los límites son $\theta_{min} = \lambda/a$ y $\theta_{max} = \lambda/d$, $2\pi\lambda$ es la longitud de onda de de Broglie del electrón incidente, d es el radio de la distribución de carga del núcleo y a es el radio de Bohr del átomo. Con esta información se puede reescribir el tercer término. Como las derivadas segundas no dependen de $\bar{\theta}'$ pueden salir de la integral y sólo queda reformular la expresión $\int \theta_i'^2 \sigma(\bar{\theta}')d\bar{\theta}'$:

$$\int \theta_i'^2 \sigma(\bar{\theta}')d\bar{\theta}' = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \theta_i'^2 \sigma(\theta_i') 2\pi \theta_i' d\theta_i' = \frac{1}{2} \frac{1}{\ln(181 Z^{-\frac{1}{3}})} \left(\frac{E_s}{E}\right)^2 \ln\left(\frac{\theta_{max}}{\theta_{min}}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{E_s}{E}\right)^2.$$

En la primer igualdad se hace uso de un argumento meramente geométrico y en la última igualdad se emplea la aproximación $\ln(\theta_{max}/\theta_{min}) \approx \ln(181 Z^{-\frac{1}{3}})$ propuesta por E. J. Williams.

De este modo se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \right) \pi = -A' \pi + B' \gamma + \frac{E_s^2}{4E^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} \right) \pi + \varepsilon \frac{\partial \pi}{\partial E} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \right) \gamma = C' \pi - \sigma_0 \gamma. \end{cases} \quad (2.14)$$

La aproximación realizada al expandir en serie de Taylor (la expresión dada en 2.14) se denomina *aproximación de Landau*. Nosotros nos vamos a centrar en obtener las soluciones en esta aproximación, si bien también hay trabajos desarrollados para obtener soluciones evitando la aproximación de Landau.

Capítulo 3

Desarrollo de la componente electromagnética de lluvias atmosféricas extendidas

3.1. Desarrollo longitudinal

3.1.1. Soluciones elementales

Como las expresiones de las secciones eficaces que presentamos en el capítulo anterior dependen de la fracción entre la energía inicial y la final involucradas en el proceso en cuestión intuimos que la cascada está representada por funciones que dependen de E_0/E y por supuesto también de la profundidad t . Fueron propuestas soluciones de la forma [11]:

$$\begin{cases} \pi(E,t)dE = a \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{dE}{E} e^{-\mu t} \\ \gamma(E,t)dE = b \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{dE}{E} e^{-\mu t}. \end{cases}$$

Reemplazando estas soluciones en el sistema (2.6) que corresponde a la aproximación A obtenemos que

$$\begin{cases} \mu = A(s) - \frac{b}{a} B(s) \\ \frac{b}{a} \mu = \frac{b}{a} \sigma_0 - C(s) \end{cases} \quad (3.1)$$

donde

$$\begin{aligned} A(s) &= \int_0^1 (1 - (1-v)^s) \varphi(v) dv, \\ B(s) &= 2 \int_0^1 u^s \psi(u) du, \\ C(s) &= \int_0^1 u^s \varphi(u) du. \end{aligned}$$

Como deseamos que el sistema (3.1) tenga solución el determinante de la matriz que lo representa deberá ser 0. De aquí obtenemos que

$$\mu^2 + \mu(-A - \sigma_0) + (A\sigma_0 - BC) = 0.$$

O, lo que es equivalente, obtenemos que

$$[\mu + \lambda_1(s)][\mu + \lambda_2(s)] = 0$$

donde

$$\lambda_1(s) = -\frac{A(s) + \sigma_0}{2} + \frac{1}{2}[(A(s) - \sigma_0)^2 + 4B(s)C(s)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

$$\lambda_2(s) = -\frac{A(s) + \sigma_0}{2} - \frac{1}{2}[(A(s) - \sigma_0)^2 + 4B(s)C(s)]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3)$$

Si $\mu = -\lambda_1(s)$ la segunda ecuación de (3.1) da la relación $\frac{b}{a} = \frac{C(s)}{\sigma_0 + \lambda_1(s)}$ mientras que si $\mu = -\lambda_2(s)$ la relación que se obtiene es $\frac{b}{a} = \frac{C(s)}{\sigma_0 + \lambda_2(s)}$. Por lo tanto las soluciones elementales toman la forma:

$$\begin{cases} \pi(E, t) dE = a \frac{E_0^s dE}{E^{s+1}} e^{\lambda_1(s)t} \\ \gamma(E, t) dE = \frac{aC(s)}{\sigma_0 + \lambda_i(s)} \frac{E_0^s dE}{E^{s+1}} e^{\lambda_i(s)t} \end{cases} \quad (3.4)$$

donde $i = 1, 2$.

Notemos que $\lambda_2(s)$ es negativo para todo valor de s y que su valor absoluto es siempre mayor que σ_0 . Esto implica que $\frac{1}{\sigma_0 + \lambda_2(s)}$ es menor que 0 para todo valor de s . Por lo tanto la solución $\gamma(E, t)$ para $i = 2$ no puede aparecer sola. Esta solución únicamente es posible en combinación con la solución $\pi(E, t)$ para $i = 2$.

Además está claro que el factor $\lambda_1(s)$ en la exponencial de las soluciones determina el comportamiento general de la cascada en función de la profundidad t . Se puede verificar que

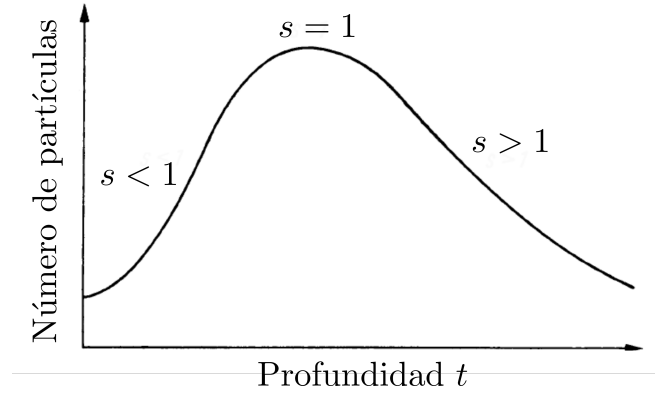


Figura 3.1: Significado físico de la edad s .

$\lambda_1(s)$ es positiva para $s < 1$, vale 0 en $s = 1$ y es negativa para $s > 1$. Esto se puede interpretar como que para valores de s tal que $s < 1$ la cascada está en una etapa de crecimiento, en $s = 1$ alcanza su máximo y para $s > 1$ la cascada disminuye continuamente en tamaño. La figura 3.1 acompaña este razonamiento. Para $s > 2$ se puede decir que la cascada es completamente absorbida por el medio. Por esta razón al parámetro s se lo denomina *edad* de la cascada.

3.1.2. Soluciones analíticas en la aproximación A

Las soluciones elementales por si solas no son demasiado útiles ya que lo que interesa son cascadas generadas por, por ejemplo, un único electrón. Las condiciones iniciales en este caso serían

$$\begin{cases} \pi(E, 0) = \delta(E - E_0) \\ \gamma(E, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Estas condiciones iniciales no pueden ser satisfechas por las soluciones elementales. Pero si se las combina del siguiente modo se pueden obtener las soluciones analíticas en la aproximación A [11]:

$$\begin{cases} \pi(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{1}{E^{s+1}} (a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}) \\ \gamma(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{1}{E^{s+1}} \left(\frac{a_1 C}{\sigma_0 + \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{a_2 C}{\sigma_0 + \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \right). \end{cases} \quad (3.6)$$

Aquí a_1 y a_2 ahora son funciones de s a determinar para condiciones iniciales dadas.

Continuemos con el ejemplo de un electrón como partícula inicial. Si se le aplica la transformada de Mellin (ver apéndice A) a las condiciones iniciales dadas en (3.5) se obtiene que:

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_\pi(s, t=0) = E_0^s \\ \mathfrak{M}_\gamma(s, t=0) = 0 \end{cases}$$

Ahora tomando la transformada de Mellin inversa llegamos a que

$$\begin{cases} \pi(E, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{1}{E} \\ \gamma(E, 0) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Comparando las ecuaciones (3.6) y (3.7) vemos que los coeficientes $a_1(s)$ y $a_2(s)$ quedan completamente determinados:

$$a_1(s) + a_2(s) = E_0^s, \quad \frac{a_1 C}{\sigma_0 + \lambda_1} + \frac{a_2 C}{\sigma_0 + \lambda_2} = 0.$$

Si definimos funciones H_1 y H_2 como

$$H_1(s) = \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}, \quad H_2(s) = -\frac{\sigma_0 + \lambda_2(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}$$

resultan ser

$$a_1(s) = H_1(s)E_0^s, \quad a_2(s) = H_2(s)E_0^s$$

por lo que podemos escribir el espectro diferencial de los electrones y el del fotón de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \pi(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{E_0^s}{E^{s+1}} \left(H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} + H_2(s) e^{\lambda_2(s)t} \right) \\ \gamma(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{E_0^s}{E^{s+1}} \frac{L(s)}{s^{\frac{1}{2}}} \left(e^{\lambda_1(s)t} - e^{\lambda_2(s)t} \right) \end{cases}$$

donde

$$L(s) = \frac{s^{\frac{1}{2}} C(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}.$$

Los espectros integrales correspondientes son:

$$\begin{cases} \Pi(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ds}{s} \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \left(H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} + H_2(s) e^{\lambda_2(s)t} \right) \\ \Gamma(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{E_0}{E} \right)^s L(s) \left(e^{\lambda_1(s)t} - e^{\lambda_2(s)t} \right). \end{cases} \quad (3.8)$$

Si, en cambio, las condiciones iniciales son las correspondientes a un fotón primario

$$\begin{cases} \pi(E, 0) = 0 \\ \gamma(E, 0) = \delta(E - E_0) \end{cases} \quad (3.9)$$

llegamos con el mismo mecanismo que usamos anteriormente a que

$$a_1(s) + a_2(s) = 0, \quad \frac{a_1 C}{\sigma_0 + \lambda_1} + \frac{a_2 C}{\sigma_0 + \lambda_2} = E_0^s.$$

Con las mismas definiciones para las funciones H_1 y H_2 esta vez los coeficientes toman la forma

$$a_1(s) = \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{C(s)} H_2(s) E_0^s, \quad a_2(s) = -a_1(s).$$

En este caso el espectro diferencial de los electrones y el de los fotones toman otra forma:

$$\begin{cases} \pi(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{E_0^s}{E^{s+1}} M(s) s^{\frac{1}{2}} \left(e^{\lambda_1(s)t} - e^{\lambda_2(s)t} \right) \\ \gamma(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{E_0^s}{E^{s+1}} \left(H_2(s) e^{\lambda_1(s)t} + H_1(s) e^{\lambda_2(s)t} \right) \end{cases}$$

donde $M(s) s^{\frac{1}{2}} = \frac{B(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}$. Para obtener esta expresión resumida de $M(s)$ hicimos uso de las definiciones de las funciones λ_1 y λ_2 dadas en 3.2. Los espectros integrales en este caso son

$$\begin{cases} \Pi(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \left(\frac{E_0}{E} \right)^s M(s) s^{-\frac{1}{2}} \left(e^{\lambda_1(s)t} - e^{\lambda_2(s)t} \right) \\ \Gamma(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{1}{s} \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \left(H_2(s) e^{\lambda_1(s)t} + H_1(s) e^{\lambda_2(s)t} \right). \end{cases}$$

Para ahora estar en condiciones de graficar los espectros diferenciales e integrales es indispensable calcular las integrales complejas que los representan. Para ello haremos uso del método del punto de ensilladura descrito en el apéndice B y lo aplicaremos para presentar los pasos necesarios para obtener el espectro integral de los fotones escogiendo como partícula inicial un electrón (ver ecuación 3.8). Si reescribimos éste obtenemos

$$\Gamma(E, t) \approx \frac{1}{2\pi i} \int_C ds L(s) e^{\lambda_1(s)t + s \ln \left(\frac{E_0}{E} \right) - \frac{3}{2} \ln(s)}.$$

Aquí despreciamos el término que involucra $\lambda_2(s)$ ya que $\lambda_2(s) < \lambda_1(s)$ para todo valor de s . Como $L(s)$ varía poco como función de s podemos aplicar el método del punto de ensilladura a la función en el exponente:

$$\Gamma(E, t) \approx L(\bar{s}) \bar{s}^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{E_0}{E} \right)^{\bar{s}} e^{\lambda_1(\bar{s})t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1''(\bar{s})t + \frac{2}{3} \frac{1}{\bar{s}^2}}} \quad (3.10)$$

donde \bar{s} viene dado por la ecuación

$$\lambda_1'(\bar{s})t + \ln \left(\frac{E_0}{E} \right) - \frac{3}{2} \frac{1}{\bar{s}} = 0 \quad (3.11)$$

y $\lambda_i'(s) = \frac{d\lambda_i(s)}{ds}$ y $\lambda_i''(s) = \frac{d^2\lambda_i(s)}{ds^2}$. Por lo tanto se puede graficar el espectro fijando un valor de E_0/E de interés. Luego para diversos valores fijos de la profundidad t se calcula el valor de \bar{s} correspondiente recurriendo a la ecuación (3.11). Posteriormente se inserta este valor de \bar{s} en la ecuación (3.10). De este modo se obtiene el valor de $\Gamma(E, t)$ para este valor de t . Se repite este paso para tantos valores de t como sea necesario para obtener una gráfica. En la figura 3.2 se pueden apreciar los espectros integrales de los electrones para diversos valores de E_0/E . Su cálculo es análogo al que acabamos de describir. Allí se puede observar que los espectros alcanzan un máximo que se va corriendo a profundidades más avanzadas para razones más grandes entre E_0 y E . Calculemos ahora la profundidad a la cual se alcanza este máximo retornando al caso del espectro integral de los fotones.

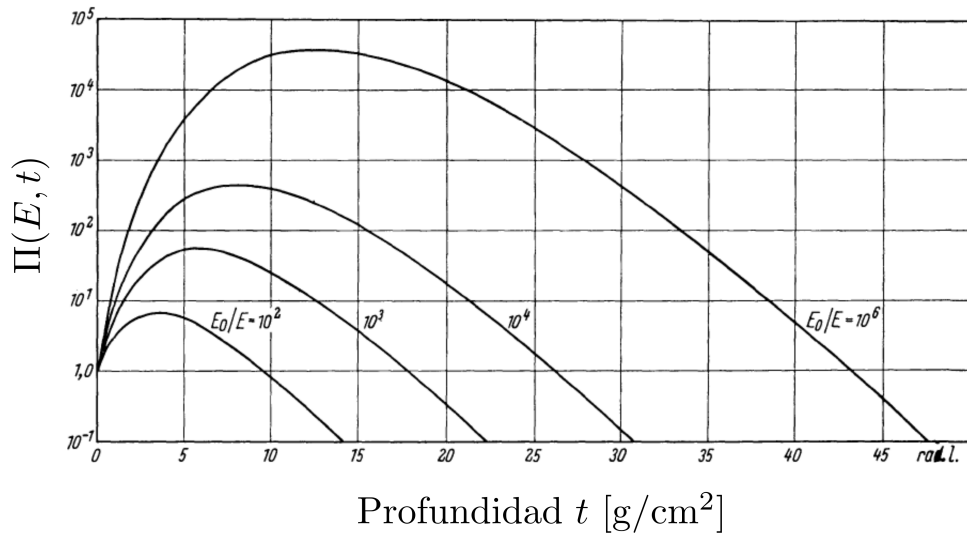


Figura 3.2: Espectros integrales de los electrones en la aproximación A para razones $\frac{E_0}{E}$ entre 10^2 y 10^6 .

Sean T la profundidad a la cual la lluvia alcanza el máximo de su desarrollo y \bar{s} la edad correspondiente. Entonces, como \bar{s} es una función de t tenemos que en este punto por la regla de la cadena

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 0.$$

Ya que $L(s)/\sqrt{\lambda_1''(s)t + \frac{2}{3}\frac{1}{s^2}}$ varía poco como función de s la vamos a tomar aproximadamente constante y entonces podemos aproximar esta ecuación y obtener

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} \left(\ln \left(\frac{E_0}{E} \right) + \lambda_1'(\bar{s})t - \frac{3}{2}\bar{s}^{-\frac{5}{2}} \right) + \lambda_1(\bar{s}) \approx 0.$$

Utilizando la ecuación (3.11) podemos simplificar y obtener que

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\bar{s}} - \frac{1}{\bar{s}^{\frac{5}{2}}} \right) + \lambda_1(\bar{s}) \approx 0.$$

El valor de $\bar{s} = 1$ satisface la ecuación. Usando que $\lambda'(1) \approx -1$ y recurriendo nuevamente a la ecuación (3.11) obtenemos que la profundidad a la cual se alcanza el máximo es

$$T = \ln\left(\frac{E_0}{E}\right) - \frac{3}{2}.$$

Naturalmente el número máximo de partículas es

$$\Gamma(E, T) \approx 0,4251 \left(\frac{E_0}{E}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1,653T + \frac{2}{3}}}$$

ya que $\lambda_1(1) = 0$, $\lambda_1''(1) = 1,653$ y $L(1) = 0,4251$. Hemos llegado nuevamente a la propiedad que presentamos en la introducción que la cantidad máxima de partículas es proporcional a la energía del primario:

$$\Gamma(E, T) \propto E_0.$$

Imitando este mecanismo también se pueden obtener las gráficas, los valores de las profundidades T y de las cantidades máximas de partículas para los demás espectros. En todos los casos se podrá ver que el número máximo de partículas es proporcional a la energía del primario.

3.1.3. Soluciones analíticas en la aproximación B

En la aproximación B el término correspondiente al efecto de la ionización $\varepsilon \frac{\partial \pi}{\partial E}$ no depende de la fracción E_0/E como los demás términos por lo que no es posible utilizar las soluciones elementales estudiadas anteriormente. Como alternativa fue propuesta exitosamente una solución en forma de una serie de potencias en $\frac{\varepsilon}{E}$ [11]:

$$\pi(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{1}{E} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n \phi_n(s, t). \quad (3.12)$$

Vamos a concentrarnos en esta sección en el espectro diferencial π pero de manera muy similar se pueden obtener los demás espectros. Como se verá más adelante para llegar a una solución concreta hay que proponer una función ϕ_0 de la cual partir. Para el caso del espectro π fue propuesto

$$\phi_0(s, t) = H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} + H_2(s) e^{\lambda_2(s)t}$$

de modo que el primer término de la serie concuerde con la solución en la aproximación A. Para los demás espectros en este momento habría que tomar ϕ_0 de manera tal que sea igual a la solución correspondiente en la aproximación A.

Recordemos que el problema a resolver es

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial t} = -A'\pi + B'\gamma + \varepsilon \frac{\partial \pi}{\partial E} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\sigma_0\gamma + C'\pi. \end{cases}$$

Aplicándole a la primera de las ecuaciones el operador $(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_0)$ y haciendo uso de la segunda de las ecuaciones se obtiene que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (A' + \sigma_0) \frac{\partial}{\partial t} + (A'\sigma_0 - B'C') \right) \pi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_0 \right) \varepsilon \frac{\partial \pi}{\partial E}.$$

Llamemos a la memoria que A' , B' y C' son operadores sobre las funciones que describen la cascada. Insertando aquí la solución propuesta en (3.12) se obtiene la relación de recurrencia que deben satisfacer las funciones ϕ_n que cumplen el rol de coeficientes:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (A(s+n) + \sigma_0) \frac{\partial}{\partial t} + (A(s+n)\sigma_0 - B(s+n)C(s+n)) \right) \phi_n(s, t) \\ \quad = (s+n) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_0 \right) \phi_{n-1}(s, t) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (A(s) + \sigma_0) \frac{\partial}{\partial t} + (A(s)\sigma_0 - B(s)C(s)) \right) \phi_0(s, t) = 0 \end{cases}$$

Aquí vuelven a aparecer A , B y C que son las mismas funciones en s que fueron definidas al plantear las soluciones elementales. Dejemos la resolución de este sistema para más adelante y terminemos por ahora de escribir la solución del problema en la aproximación B en función de las ϕ_n .

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n \phi_n(s, t)$ no será convergente para cualquier valor de E y cualquier valor de t . Hay un cierto dominio de convergencia fuera del cual no se puede evaluar $\pi(E, t)$. Para poder hacerlo de todos modos se va a *extender analíticamente* esta serie, es decir, se la reescribe de una forma que tenga un dominio lo más grande posible. Esto se logra recurriendo al teorema de los residuos y recordando que si $n \in \mathbb{N}_0$ entonces $-n$ es un polo de la función gamma con residuo $\frac{(-1)^n}{n!}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n \phi_n(s, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C dq \Gamma(-q) \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^q q! \phi_q(s, t) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C dq \Gamma(-q) \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^q \mathcal{M}(s, q, t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde

$$\mathcal{M}(s, n, t) = n! \phi_n(s, t)$$

y el camino de integración C es paralelo al eje imaginario y pasa entre -1 y 0 muy cerca de 0 (en un instante estará claro porque). Finalmente los espectros diferencial e integral de los electrones resultan ser:

$$\begin{cases} \pi(E, t) = -\frac{1}{4\pi^2} \int \int ds dq \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{1}{E} \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^q \Gamma(-q) \mathcal{M}(s, q, t) \\ \Pi(E, t) = -\frac{1}{4\pi^2} \int \int \frac{ds dq}{s+q} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^q \Gamma(-q) \mathcal{M}(s, q, t) \end{cases}$$

Incluso se puede calcular ahora el número total de electrones a una determinada profundidad t :

$$\Pi(0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int ds \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s \Gamma(s) \mathcal{M}(s, -s, t).$$

Hay que hacer un par de aclaraciones aquí. Se obtiene este resultado tomando el límite de E tendiendo a 0 en la solución del espectro integral y tomando el polo $q = -s$. Aquí se nota la necesidad de tomar el eje de integración C lo suficientemente cerca de 0 como para dejar a su izquierda al valor $-s$. También hay que tener cuidado que para la profundidad $t = 0$ esto no se puede lograr por lo que si quisiéramos calcular $\Pi(0, 0)$ tendríamos que tomar de nuevo un límite. Pero como en realidad nos interesa estudiar situaciones en las que hay una única partícula inicial esto pierde importancia.

Reemplazando la definición de $\mathcal{M}(s, n, t) = n! \phi_n(s, t)$ en (3.13) se obtienen las ecuaciones de recurrencia que satisfacen:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_1(s+q)\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_2(s+q)\right) \mathcal{M}(s, q, t) = (s+q)q \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_0\right) \mathcal{M}(s, q-1, t) \\ \mathcal{M}(s, 0, t) = \phi_0(s, t) = H_1(s)e^{\lambda_1(s)t} + H_2(s)e^{\lambda_2(s)t} \end{cases} \quad (3.14)$$

Multiplicando la relación de recurrencia dada en (3.14) para $\mathcal{M}(s, q, t)$ por el operador

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_1(s+q)\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_2(s+q)\right)}$$

se obtiene

$$\mathcal{M}(s, q, t) = (s+q)q \left(\frac{H_1(s+q)}{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_1(s+q)\right)} + \frac{H_2(s+q)}{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_2(s+q)\right)} \right) \mathcal{M}(s, q-1, t). \quad (3.15)$$

Examinemos ahora como actúa un operador del tipo $1/\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\right)$ donde a no depende de t

sobre una función cualquiera $G(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial t} - a} G(t) = F(t) &\Leftrightarrow G(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \right) F(t) \\ \Leftrightarrow e^{-at} G(t) = \frac{\partial}{\partial t} (e^{-at} F(t)) &\Leftrightarrow e^{at} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial t}} (e^{-at} G(t)) = F(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{\frac{\partial}{\partial t} - a} G(t) = e^{at} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial t}} (e^{-at} G(t)).$$

Se puede seguir desarrollando esta expresión y se obtiene que

$$\frac{1}{\frac{\partial}{\partial t} - a} G(t) = e^{at} \int_0^t e^{-au} G(u) du = \int_0^t e^{a(t-u)} G(u) du = \int_0^t e^{at'} G(t-t') dt'.$$

Ahora se está en condiciones de reescribir la ecuación (3.15):

$$\mathcal{M}(s, q, t) = (s+q)q \int_0^t \left(H_1(s+q) e^{\lambda_1(s+q)t'} + H_2(s+q) e^{\lambda_2(s+q)t'} \right) \mathcal{M}(s, q-1, t-t') dt'.$$

Dado que la función $\mathcal{M}(s, 0, t)$ es conocida, se puede ahora obtener $\mathcal{M}(s, 1, t)$, luego $\mathcal{M}(s, 2, t)$ y así sucesivamente. Usando el método de inducción se deduce que $\mathcal{M}(s, n, t)$ es una combinación lineal de $e^{\lambda_1(s)t}$, $e^{\lambda_1(s+1)t}$, ..., $e^{\lambda_1(s+n)t}$, $e^{\lambda_2(s)t}$, $e^{\lambda_2(s+1)t}$, ..., $e^{\lambda_2(s+n)t}$ en la cual toda la dependencia de t está en estos factores, es decir, los coeficientes sólo dependen de s y q :

$$\mathcal{M}(s, q, t) = \sum_{i=0}^n \mathcal{M}_{1,i}(s, q) e^{\lambda_1(s+i)t} + \mathcal{M}_{2,i}(s, q) e^{\lambda_2(s+i)t}.$$

Por supuesto vale que $\mathcal{M}_{1,0}(s, 0) = H_1(s)$ y $\mathcal{M}_{2,0}(s, 0) = H_2(s)$.

Reescribiendo un poco el espectro diferencial se llega a que:

$$\pi(E, t) = - \sum_{i=0}^n \frac{1}{4\pi^2} \int \int ds dq \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{1}{E} \left(\frac{\varepsilon}{E} \right)^q \Gamma(-q) \left(\mathcal{M}_{1,i}(s, q) e^{\lambda_1(s+i)t} + \mathcal{M}_{2,i}(s, q) e^{\lambda_2(s+i)t} \right).$$

Haciendo ahora el cambio de variables $s+i = s^*$, $q-i = q^*$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \pi(E, t) &= - \sum_{i=0}^n \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{\varepsilon}{E} \right)^i \int \int ds^* dq^* \left(\frac{E_0}{E} \right)^{s^*} \frac{1}{E} \left(\frac{\varepsilon}{E} \right)^{q^*} \Gamma(-q^*-i) \times \\ &\quad \times \left(\mathcal{M}_{1,i}(s^*-i, q^*+i) e^{\lambda_1(s^*)t} + \mathcal{M}_{2,i}(s^*-i, q^*+i) e^{\lambda_2(s^*)t} \right) \\ &= - \frac{1}{4\pi^2} \int \int ds dq \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{1}{E} \left(\frac{\varepsilon}{E} \right)^q \sum_{i=0}^n \left(\frac{\varepsilon}{E} \right)^i \Gamma(-q-i) \times \\ &\quad \times \left(\mathcal{M}_{1,i}(s-i, q+i) e^{\lambda_1(s)t} + \mathcal{M}_{2,i}(s-i, q+i) e^{\lambda_2(s)t} \right) \end{aligned}$$

Luego también se pueden obtener las expresiones correspondientes al espectro integral y al número total de electrones:

$$\begin{aligned}\Pi(E, t) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int \int \frac{ds dq}{s+q} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^q \sum_{i=0}^n \left(\frac{\varepsilon}{E_0}\right)^i \Gamma(-q-i) \times \\ &\quad \times \left(\mathcal{M}_{1,i}(s-i, q+i) e^{\lambda_1(s)t} + \mathcal{M}_{2,i}(s-i, q+i) e^{\lambda_2(s)t} \right) \\ \Pi(0, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int ds \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s \sum_{i=0}^n \left(\frac{\varepsilon}{E_0}\right)^i \Gamma(s-i) \times \\ &\quad \times \left(\mathcal{M}_{1,i}(s-i, -s+i) e^{\lambda_1(s)t} + \mathcal{M}_{2,i}(s-i, -s+i) e^{\lambda_2(s)t} \right)\end{aligned}$$

Se obtuvieron las soluciones exactas en la aproximación B [11]. Como lo que interesa son partículas primarias de altas energías se puede suponer que $E_0 \gg \varepsilon$ y uno se puede quedar con el primer término de la suma. Esto posibilita calcular luego valores concretos para estas funciones. Las aproximaciones que serán entonces de gran utilidad son:

$$\begin{aligned}\pi(E, t) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int \int ds dq \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{1}{E} \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^q \Gamma(-q) \times \left(\mathcal{M}_{1,0}(s, q) e^{\lambda_1(s)t} + \mathcal{M}_{2,0}(s, q) e^{\lambda_2(s)t} \right) \\ \Pi(E, t) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int \int \frac{ds dq}{s+q} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^q \Gamma(-q) \times \left(\mathcal{M}_{1,0}(s, q) e^{\lambda_1(s)t} + \mathcal{M}_{2,0}(s, q) e^{\lambda_2(s)t} \right) \\ \Pi(0, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int ds \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s \Gamma(s) \times \left(\mathcal{M}_{1,0}(s, -s) e^{\lambda_1(s)t} + \mathcal{M}_{2,0}(s, -s) e^{\lambda_2(s)t} \right)\end{aligned}$$

El procedimiento para obtener las expresiones equivalentes para los fotones por supuesto es muy similar.

Aproximación numérica

Vamos a mostrar la obtención de valores concretos pero aproximados para el número total de partículas $\Pi(E, t)$ [11]. Como en la aproximación A, usando el método del punto de ensilladura y despreciando el término que involucra $e^{\lambda_2(s)t}$ se obtiene que

$$\Pi(0, t) = \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^{\bar{s}} \Gamma(\bar{s}) \mathcal{M}_{1,0}(\bar{s}, -\bar{s}) e^{\lambda_1(\bar{s})t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\lambda''(\bar{s})t + \left(\frac{\mathcal{M}'_{1,0}(s, -s)}{\mathcal{M}_{1,0}(s, -s)}\right)' \Big|_{s=\bar{s}} + \frac{d^2}{ds^2} \ln(\Gamma(s)) \Big|_{s=\bar{s}}}}$$

donde \bar{s} viene dado por

$$\left(\lambda'(s)t + \ln\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right) + \frac{\mathcal{M}'_{1,0}(s, -s)}{\mathcal{M}_{1,0}(s, -s)} + \frac{d}{ds} \ln(\Gamma(s)) \right) \Big|_{s=\bar{s}} = 0.$$

Definiendo la funcion $\mathcal{K}_{1,0}(s, q)$ se simplificarán los cálculos un poco del siguiente modo:

$$\mathcal{M}_{1,0}(s, q) = H_1(s) \frac{\Gamma(s+q+1)}{\Gamma(s+1)} \mathcal{K}_{1,0}(s, q). \quad (3.16)$$

Como las funciones $\mathcal{M}_{i,j}$ que cumplen el rol de los coeficientes en la expansión de $\mathcal{M}(s, q, t)$ no dependen de t se puede exigir que cada una de ellas satisfaga ella misma la relación de recurrencia dada en (3.14) ya que de este modo $\mathcal{M}(s, q, t)$ automáticamente también la cumpliría. Insertando entonces $\mathcal{M}_{1,0}(s, q)$ como está definida en (3.16) en la relación de recurrencia se obtiene una nueva relación de recurrencia para $\mathcal{K}_{1,0}(s, q)$:

$$\begin{cases} \left(\frac{[\lambda_1(s) - \lambda_1(s+q)][\lambda_1(s) - \lambda_2(s+q)]}{[\sigma_0 + \lambda_1(s)]} \right) \mathcal{K}_{1,0}(s, q) = q \mathcal{K}_{1,0}(s, q-1) \\ \mathcal{K}_{1,0}(s, 0) = 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

Usando las definiciones de las funciones λ_1 y λ_2 es posible reescribir esta ecuación de recurrencia como sigue:

$$\begin{cases} \left(\lambda_1(s) + A(s+q) - \frac{B(s+q)C(s+q)}{\sigma_0 + \lambda_1(s)} \right) \mathcal{K}_{1,0}(s, q) = q \mathcal{K}_{1,0}(s, q-1) \\ \mathcal{K}_{1,0}(s, 0) = 1 \end{cases}$$

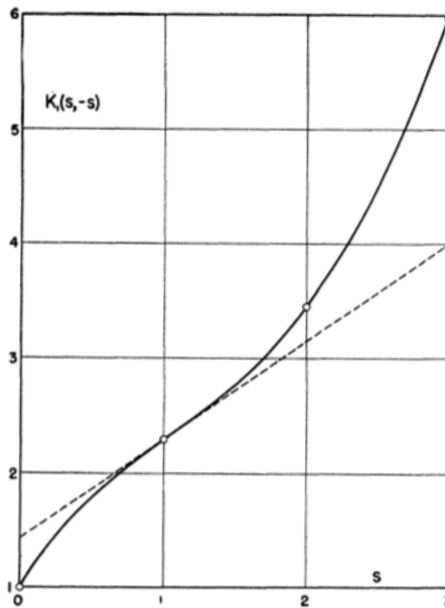


Figura 3.3: Gráfico de la función $\mathcal{K}_{1,0}(s, -s)$.

Ahora interesa obtener $\mathcal{K}_{1,0}(s, -1)$. La relación de recurrencia para q tendiendo a 0 da

$$\frac{\mathcal{K}_{1,0}(s, -1)}{\mathcal{K}_{1,0}(s, 0)} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q} \left(A(s+q) + \lambda_1(s) - \frac{B(s+q)C(s+q)}{\sigma_0 + \lambda_1(s)} \right).$$

Sumando y restando $A(s)$ y $\frac{B(s)C(s)}{\sigma_0 + \lambda_1(s)}$ dentro de los paréntesis y usando la definición de la derivada (y teniendo en cuenta que $[\sigma_0 + \lambda_1(s)][A(s) + \lambda_1(s)] - B(s)C(s) = 0$) se obtiene esta expresión más concisa:

$$\frac{\mathcal{K}_{1,0}(s, -1)}{\mathcal{K}_{1,0}(s, 0)} = A'(s) - \frac{1}{\sigma_0 + \lambda_1(s)} \frac{d}{ds} (B(s)C(s)).$$

Recordando que $\mathcal{K}_{1,0}(s, 0) = 1$ se obtiene la cantidad de interés:

$$\mathcal{K}_{1,0}(s, -1) = A'(s) - \frac{1}{\sigma_0 + \lambda_1(s)} \frac{d}{ds} (B(s)C(s)).$$

De ahora en adelante es más directo obtener los demás $\mathcal{K}_{1,0}(s, n)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{1,0}(s, -2) &= -\mathcal{K}_{1,0}(s, -1) \left(\lambda_1(s) + A(s-1) - \frac{B(s-1)C(s-1)}{\sigma_0 + \lambda_1(s)} \right) \\ \mathcal{K}_{1,0}(s, -3) &= -\frac{1}{2} \mathcal{K}_{1,0}(s, -2) \left(\lambda_1(s) + A(s-2) - \frac{B(s-2)C(s-2)}{\sigma_0 + \lambda_1(s)} \right) \\ \frac{1}{\mathcal{K}_{1,0}(s, 1)} &= \lambda_1(s) + A(s+1) - \frac{B(s+1)C(s+1)}{\sigma_0 + \lambda_1(s)} \\ \frac{1}{\mathcal{K}_{1,0}(s, 2)} &= \frac{1}{2\mathcal{K}_{1,0}(s, 1)} \left(\lambda_1(s) + A(s+2) - \frac{B(s+2)C(s+2)}{\sigma_0 + \lambda_1(s)} \right) \end{aligned}$$

Para ahora obtener valores concretos de $\Pi(0, t)$ en definitiva únicamente falta conocer la función $\mathcal{K}_{1,0}(s, -s)$. Se la obtiene interpolando sobre los valores recién obtenidos (o incluso más) usando por ejemplo Mathematica. La figura 3.3 muestra la gráfico de la función $\mathcal{K}_{1,0}(s, -s)$.

3.2. Desarrollo tridimensional

Recordemos que el problema a resolver es:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \right) \pi = -A' \pi + B' \gamma + \frac{E_s^2}{4E^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} \right) + \varepsilon \frac{\partial \pi}{\partial E} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \right) \gamma = C' \pi - \sigma_0 \gamma. \end{cases}$$

Se le aplica a ambas ecuaciones la transformada de Fourier, es decir, se las multiplica por

$e^{i(\bar{r} \cdot \bar{x} + \bar{\theta} \cdot \bar{\xi})}$ y se las integra con respecto a \bar{r} y $\bar{\theta}$. Las nuevas ecuaciones son:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \right) f = -A' f + B' g - \frac{E_s^2 \bar{\xi}^2}{4E^2} f + \epsilon \frac{\partial f}{\partial E} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \right) g = C' f - \sigma_0 g \end{cases} \quad (3.18)$$

donde f y g son las transformadas de Fourier de π y γ respectivamente:

$$\begin{cases} f(\bar{x}, \bar{\xi}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\bar{r} \cdot \bar{x} + \bar{\theta} \cdot \bar{\xi})} \pi(\bar{r}, \bar{\theta}) d\bar{r} d\bar{\theta} \\ g(\bar{x}, \bar{\xi}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\bar{r} \cdot \bar{x} + \bar{\theta} \cdot \bar{\xi})} \gamma(\bar{r}, \bar{\theta}) d\bar{r} d\bar{\theta}. \end{cases} \quad (3.19)$$

Resolviendo el sistema dado en (3.18) para la función f se obtiene la siguiente ecuación sobre la cual se trabajará ahora hasta el final de la sección:

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} - \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \right)^2 + (A' + \sigma_0) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \right) + (A' \sigma_0 - B' C') \right) f(\bar{x}, \bar{\xi}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} + \sigma_0 \right) \left(-\frac{E_s^2 \bar{\xi}^2}{4E^2} + \epsilon \frac{\partial}{\partial E} \right) f(\bar{x}, \bar{\xi}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Vamos a concentrarnos ahora en los pasos necesarios para revelar la forma del espectro de los electrones. La distribución lateral para los electrones viene dada por $\pi_2(E, r, t) 2\pi r dr$ donde π_2 está definida como

$$\pi_2(E, r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(E, \bar{r}, \bar{\theta}, t) d\bar{\theta}.$$

En la expresión de la distribución lateral se reemplaza el vector \bar{r} por su módulo porque la simetría con respecto al eje de la cascada lo permite. Tomando $\xi = 0$ en (3.19) se obtiene

$$f(\bar{x}, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\bar{r} \cdot \bar{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(E, \bar{r}, \bar{\theta}, t) d\bar{\theta} d\bar{r} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\bar{r} \cdot \bar{x}} \pi_2(E, \bar{r}, t) d\bar{r}$$

y por como es la transformada de Fourier inversa, π_2 toma la forma

$$\pi_2(E, \bar{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\bar{r} \cdot \bar{x}} f(\bar{x}, 0) d\bar{x}.$$

Recordando que $\bar{x} = (x_1, x_2)$, en esta última integral ahora se puede hacer el cambio de variables

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \varphi \\ x_2 = x \sin \varphi \end{cases}$$

y nuevamente por la simetría axial del problema f sólo depende del módulo de x . Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\bar{r} \cdot \bar{x}} f(\bar{x}, 0) d\bar{x} = \int_0^{+\infty} x f(x, 0) \int_0^{2\pi} e^{ixr \cos \varphi} d\varphi dx = \int_0^{+\infty} f(x, 0) J_0(rx) 2\pi x dx$$

donde $J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \theta} d\theta$ es la *función de Bessel de orden 0*. Por lo tanto se obtuvo que

$$\pi_2(E, \bar{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 0) J_0(rx) 2\pi x dx$$

Si siguiendo las cuentas de manera similar se llega a que la función de distribución angular es

$$\pi_1(E, \bar{\theta}, t) = \int_0^{+\infty} f(0, \xi) J_0(\theta \xi) 2\pi \xi d\xi.$$

En las expresiones que se obtuvieron para π_1 y π_2 se ve que, ya que las funciones de Bessel son conocidas, el problema de obtener la función $f(x, \xi)$ para valores cualesquiera se redujo a conocer las leyes de las funciones $f(x, 0)$ y $f(0, \xi)$. La ecuación integro-diferencial que satisface $f(0, \xi)$ es la ecuación (3.20) reemplazando $\bar{x} = \bar{0}$. La ecuación que satisface $f(x, 0)$ es un poco más difícil de obtener ya que la función que se busca es derivada con respecto a ξ_1 y ξ_2 y no es factible simplemente reemplazar $\bar{\xi} = \bar{0}$. De ahora en adelante nos concentraremos en obtener esta ecuación y resolverla.

Se eligen a ξ_1 y ξ_2 como las componentes paralela y perpendicular de $\bar{\xi}$ con respecto a \bar{x} respectivamente. Ahora sí podemos reemplazar $\xi_2 = 0$ en (3.20) y llegar a que

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} - x \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right)^2 + (A' + \sigma_0) \left(\frac{\partial}{\partial t} - x \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) + (A' \sigma_0 - B' C') \right) f(\bar{x}, \xi_1, 0) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - x \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \sigma_0 \right) \left(-\frac{E_s^2 \xi_1^2}{4E^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial E} \right) f(\bar{x}, \xi_1, 0). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Realizando en esta ecuación integro-diferencial nuevamente un cambio de variables se ob-

tiene

$$\begin{cases} \tau = t \\ \zeta = \frac{\xi_1}{x} + t \end{cases} \quad (3.22)$$

y la versión definitiva de la cual uno se puede valer para llegar a una expresión de π_2 :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + (A' + \sigma_0) \frac{\partial}{\partial \tau} + (A' \sigma_0 - B' C') \right) f(\bar{x}, \zeta, 0) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \sigma_0 \right) \left(-\frac{E_s^2 x^2}{4E^2} (\zeta - \tau)^2 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial E} \right) f(\bar{x}, \zeta, 0). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Aquí fue necesario recurrir a la regla de la cadena para utilizar la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} - x \frac{\partial}{\partial \xi_1}.$$

Extendiendo la solución propuesta para la aproximación B considerando que ahora tenemos el término nuevo $-\frac{E_s^2 x^2}{4E^2}$ se propuso una solución de la forma:

$$f(E, \bar{x}, \zeta, 0, \tau) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{ds}{E} \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{E_s^2 x^2}{4E^2} \right)^m \left(\frac{-\varepsilon}{E} \right)^n \phi_{m,n}(s, \tau) \right). \quad (3.24)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación integro-diferencial (3.22), que es la que debe satisfacerse, se consiguen las relaciones que la caracterizan (notemos que las nuevas funciones Φ dependen de $(s, \zeta - \tau, \tau)$ mientras que las funciones ϕ dependen de (s, τ)):

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + (A(s+2m+n)\sigma_0) \frac{\partial}{\partial \tau} + (A\sigma_0 - BC)(s+2m+n) \right) \Phi_{m,n} \\ \quad = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \sigma_0 \right) ((\zeta - \tau)^2 \Phi_{m-1,n} + (s+2m+2)\Phi_{m,n-1}) \\ \Phi_{0,0}(s, \zeta - \tau, \tau) = H_1(s)e^{\lambda_1(s)t} + H_2(s)e^{\lambda_2(s)t} \\ \phi_{m,n}(s, \tau) = \lim_{(\zeta-\tau) \rightarrow 0} \Phi_{m,n}(s, \zeta - \tau, \tau) \end{cases} \quad (3.25)$$

donde la función inicial $\Phi_{0,0}$ dada es la que surge de tomar como primario un electrón.

Nuevamente se realiza una extensión analítica para ampliar el dominio de convergencia de la solución. Para ello se reescribe la expresión en paréntesis dada en (3.24):

$$\begin{aligned} f(E, \bar{x}, \zeta, 0, \tau) &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{ds}{E} \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \times \\ &\quad \times \left(-\frac{1}{4\pi^2} \iint dp dq \Gamma(-p) \Gamma(-q) \left(\frac{E_s^2 x^2}{4E^2} \right)^p \left(\frac{\varepsilon}{E} \right)^q \mathcal{M}(p, q, s, \tau) \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde la función \mathcal{M}_2 está definida como

$$\mathcal{M}_2(p, q, s, \tau) = \phi_{m,n}(s, \tau) \Gamma(n+1) \Gamma(m+1)$$

y viene determinada por el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \lambda_1(s+2p+q) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \lambda_2(s+2p+q) \right) \mathbf{M}(p, q, s, \zeta - \tau, \tau) \\ = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \sigma_0 \right) (p(\zeta - \tau)^2 \mathbf{M}(p-1, q, s, \zeta - \tau, \tau) + q(s+2p+q) \mathbf{M}(p, q-1, s, \zeta - \tau, \tau)) \\ \mathbf{M}(0, 0, s, 0, t) = H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} + H_2(s) e^{\lambda_2(s)t} \\ \mathcal{M}_2(p, q, s, \tau) = \lim_{(\zeta - \tau) \rightarrow 0} \mathbf{M}(p, q, s, \zeta - \tau, \tau). \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Se hace uso de la propiedad

$$\int_0^\infty J_0(rx) \left(\frac{x^2}{4} \right)^p x dx = 2 \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(-p)} x^{-2p-2}$$

de la función de Bessel de orden 0 para finalmente presentar una expresión concreta de π_2 que es muy similar a la que se pueden obtener para los demás espectros:

$$\pi_2(E, \bar{r}, t) = -\frac{1}{8\pi^4 i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds dp dq \frac{1}{E} \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \left(\frac{E}{E_s} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon}{E} \right)^q \left(\frac{E^2 r^2}{E_s^2} \right)^{-p-1} \times \\ \times \Gamma(p+1) \Gamma(-q) \mathcal{M}_2(p, q, s, t) \quad (3.28)$$

3.3. Aplicación de la teoría tridimensional a lluvias atmosféricas extendidas

Como mencionábamos en la introducción la gran mayoría de partículas que representan los primarios que llegan a nuestra atmósfera no son electrones, positrones o fotones. Por lo tanto una lluvia atmosférica extendida en general no podrá ser descripta por ninguna de las expresiones obtenidas en las secciones anteriores. Ahora veremos cómo obtener una expresión que describe la componente electromagnética de una cascada haciendo uso de las expresiones que obtuvimos hasta ahora [9].

En un modelo simplificado uno puede suponer que la componente electromagnética es la suma de todas las subcascadas generadas por los fotones que son producto del decaimiento

de los piones neutros que a su vez son producidos cerca del eje de la cascada en colisiones hadrónicas. En la figura 3.4 se puede ver un esquema de este fenómeno. Cada curva pequeña simboliza una subcascada electromagnética y la curva grande la suma de todas ellas. Supongamos además que las trayectorias de los fotones siguen la dirección del eje de la cascada y sea $F(E_0, t)dE_0 dt$ el número de fotones que son creados en los decaimientos de los piones neutros con una energía entre E_0 y $(E_0 + dE_0)$ en una profundidad entre t y $(t + dt)$. Esta función F refleja la manera en la cual la componente hadrónica infunde energía en la componente electromagnética en forma de fotones. Por lo tanto la función de estructura $\Pi(0, \bar{r}, T)$ viene dada por la expresión:

$$\Pi(0, \bar{r}, T) = \int_0^\infty dE_0 \int_0^T dt F(E_0, t) \Pi_2(E_0, 0, \bar{r}, T - t). \quad (3.29)$$

Conociendo la distribución F podemos con esta expresión reconstruir la componente EM de cualquier cascada. Vamos a utilizar este concepto en lo que queda del trabajo.

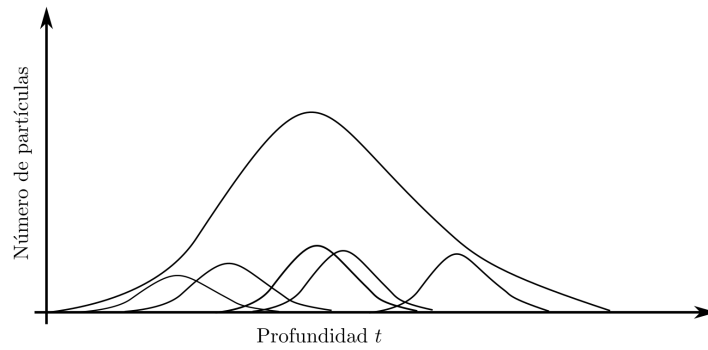


Figura 3.4: Esquema simplificado y resumido del modo en que el eje hadrónico infunde energía en la componente electromagnética.

Capítulo 4

Simulaciones de Monte Carlo

La interpretación de los datos recolectados por los detectores del Observatorio Pierre Auger se sustenta en simulaciones de lluvias atmosféricas extendidas. Éstas se basan en modelos matemáticos fenomenológicos y en parte hipotéticos (ya que hasta hoy en día carecemos de una teoría que cubra las interacciones a alta energía). En estos modelos se tienen en cuenta todos los procesos físicos de importancia, una proporción alta de los cuales son de naturaleza estocástica. Incluso para algunos procesos se dispone de modelos alternativos que se basan en suposiciones diferentes. El problema que se presenta es que mientras más alta es la energía del primario más alto es el número de partículas que son generadas en el desarrollo de la cascada y más laboriosos son los cálculos de la simulación. Siendo que el observatorio fue ideado justamente para detectar partículas de las más altas energías, afloró la necesidad de programas de simulación más eficientes. Los denominados programas de simulación híbridos cumplen esta función.

En lluvias simuladas con el programa CORSIKA se manifestó para la mayoría de los modelos de interacciones a altas energías un déficit significativo de muones en comparación con resultados experimentales [15]. La gran incógnita de hoy en día, de cómo mejorar los modelos, puede ser abordada comprendiendo de qué modo están relacionadas la cantidad y la densidad de muones con los parámetros del modelo. Una manera de acercarse a este objetivo es estudiando la historia de los muones en el transcurso de la cascada [16]. Otro camino de abordaje posible es estudiar de qué manera se relacionan los parámetros de la componente electromagnética con los parámetros de la componente muónica ya que ambas componentes en definitiva proceden de fuentes comunes dentro de la cascada, principalmente de piones neutros y cargados que a su vez son creados conjuntamente. Por esta razón estudiamos principalmente el origen de la componente electromagnética con la perspectiva de en un futuro trabajo relacionar la historia de la componente electromagnética con la muónica.

4.1. Los programas CORSIKA y CONEX

En el presente trabajo se analizaron cascadas generadas por partículas de alta energía. Como a una etapa temprana de su desarrollo éstas aún comprenden relativamente pocas partículas cada una de las interacciones en las que se ven involucradas cumple un rol importante para el desarrollo subsecuente. Es en esta fase que se presentan las fluctuaciones más significativas cascada a cascada y de estas diferencias depende el desarrollo longitudinal total de la cascada. Para poder recrear este tipo de comportamiento mediante simulaciones se acostumbra utilizar simulaciones que se basan en algoritmos de Monte Carlo ya que estas generan una historia para cada partícula de manera individual y aleatoria y de este modo reflejan el hecho que el desarrollo temprano de las cascadas es altamente probabilístico y tiene mucha variabilidad.

El programa CORSIKA (COsmic Ray SIMulations for KAscade) es un programa de simulación de Monte Carlo de lluvias atmosféricas extendidas generadas por rayos cósmicos [17, 18]. El objetivo primordial es reproducir de manera correcta no sólo los valores promedio de las observables asociadas a las cascadas sino también la manera característica en que se presentan fluctuaciones cascada a cascada. Las partículas primarias pueden ser fotones, electrones, protones o muchas otras partículas más. Luego las partículas secundarias son monitoreadas individualmente hasta que interactúan con un núcleo de la atmósfera o, si se trata de partículas inestables, hasta que decaen. Los parámetros de interés de estos secundarios son almacenados cuando alcanzan un nivel de observación. Estos niveles de observación son definidos por el usuario según sus necesidades.

Las interacciones que se tienen en cuenta en CORSIKA son todas aquellas que se sabe tienen una influencia notable sobre el desarrollo de la cascada. Para las interacciones hadrónicas a altas energías, las interacciones hadrónicas a bajas energías y las interacciones electromagnéticas el programa dispone de varios modelos entre los cuales se puede seleccionar. El mayor inconveniente que se presentará siempre que se necesiten simular interacciones a altas energías es que estas simulaciones requieren la extrapolación de modelos teóricos de interacciones hadrónicas a energías más altas que las energías para las cuales el modelo está confirmado experimentalmente (al menos 2 o 3 órdenes de magnitud).

Cuando la cascada se encuentra en una etapa de desarrollo avanzada, comprende un número considerable de partículas, especialmente si la energía del primario es muy alta, por lo que ya no tiene importancia el destino individual de cada una de ellas. En esta etapa ya se puede y es conveniente considerar un comportamiento promediado de las partículas. Una forma de reducir el tiempo de cómputo, que para energías de los primarios por encima de 10^{16} eV se torna excesivamente largo, es aplicando la opción de 'thin sampling' en

CORSIKA, donde se deja de seguir todas las partículas. Otra forma algorítmicamente conveniente es recurrir a métodos numéricos y hacer uso de expresiones analíticas, las cuales para energías relativamente bajas están disponibles. Estos mecanismos de simulación, en los cuales se combinan y entrelazan diferentes métodos de simulación se denominan métodos híbridos.

La forma usual de disminuir el tiempo de cómputo de las simulaciones es con la opción de 'thin sampling'. Si se activa este mecanismo el conjunto de todas las partículas que son generadas en una interacción y tienen una energía menor que una fracción ajustable de la energía del primario son introducidas en un algoritmo por separado. Todas estas partículas son distribuidas en diferentes grupos. En cada grupo se selecciona una única partícula de manera aleatoria. Sólo la evolución de esta partícula es simulada y almacenada, las demás partículas son descartadas. A la partícula preservada se le asigna un peso $\omega_i = 1/p_i$ donde p_i es la fracción de energía que tiene la partícula de la energía total que lleva el grupo: $p_i = E_i / \sum_j E_j$. p_i también es la probabilidad de que esa partícula sea seleccionada del conjunto. Asignándole a la partícula el peso ω_i se conserva la energía. Se podría decir que de este modo el efecto de las demás partículas es recuperado.

En el presente trabajo, por un lado, estudiamos simulaciones realizadas enteramente con CORSIKA y por otro lado recurrimos al programa híbrido CONEX que combina simulaciones en CORSIKA para las partículas de alta energía con el uso de ecuaciones analíticas para las partículas de baja energía.

En CONEX [19] la propagación, las interacciones y los decaimientos de todas las partículas que tienen energía mayor que una *energía de corte* determinada por el usuario son simulados con CORSIKA. Partículas que caen debajo de este umbral son agrupadas en bins según su energía y la profundidad a la cual se encuentran. Se ideó una tabla que a cada bin le asigna las condiciones iniciales a utilizar en las aproximaciones numéricas de las soluciones analíticas. Esta es la manera en la cual se simulan las subcascadas generadas por partículas cuya energía es menor que la energía de corte. Naturalmente la ventaja de usar CONEX es que el tiempo de simulación se reduce fuertemente ya que las aproximaciones numéricas son mucho más rápidas de obtener que los resultados de simulaciones Monte Carlo que serían necesarias para el mismo proceso. Mientras más alta es la energía del primario que se intenta estudiar, más alta va a ser la cantidad de partículas generadas en la lluvia subsecuente y más importante se torna esta ventaja. Vale la pena aclarar nuevamente que como las variaciones que se dan cascada a cascada se deben principalmente a las fluctuaciones de las primeras interacciones, las cuales están descriptas con CORSIKA, el método híbrido permite una buena descripción de la cascada en cuanto al comportamiento promedio y sus fluctuaciones.

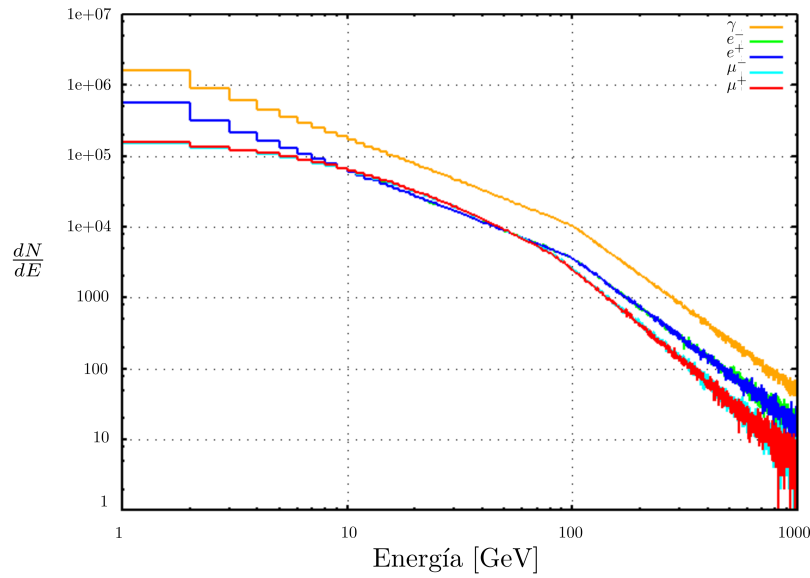
4.2. Análisis de las partículas en el suelo y de las primeras interacciones

Las simulaciones de CORSIKA pueden ser corridas luego de predefinir una gran cantidad de parámetros [17, 18]. Si se simula una única cascada se puede seleccionar la identidad de la partícula primaria, su energía y su ángulo de incidencia. Alternativamente es posible simular una gran cantidad de lluvias. En ese caso el programa escogerá las energías de los primarios de manera aleatoria del rango de energías preseleccionado y según el índice espectral determinado. Los ángulos de incidencia de los primarios serán seleccionados de manera azarosa del rango de interés, reflejando así el hecho que el flujo de rayos cósmicos mostró ser idéntico desde cualquier dirección del firmamento. También es posible elegir el modelo atmosférico que se considerará en las simulaciones según la estación del año y la localidad en la cual impactará la lluvia simulada. De este modo el programa podrá respetar la profundidad atmosférica a la cual la lluvia deja de atravesar aire y se introduce en el suelo. Además es posible fijar hasta diez niveles de observación.

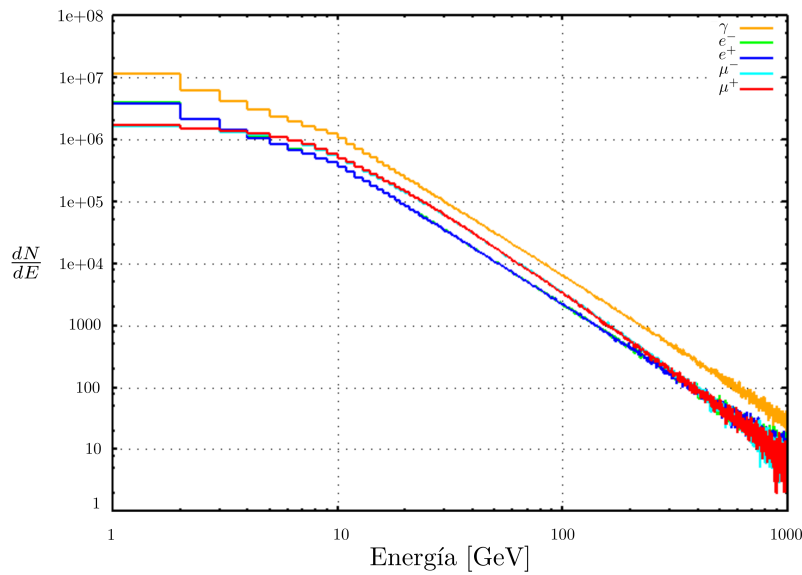
La información de todas las partículas que atraviesan estos niveles será almacenada. Esta información comprende para cada partícula, entre otras características, su identidad, las componentes de su momento lineal, las coordenadas de su posición al momento de atravesar el nivel de observación y el tiempo que transcurrió desde la primera interacción. También se puede recuperar el peso que se le había asignado en el proceso de 'thinning' (explicitado anteriormente).

Vamos a explayarnos ahora sobre el análisis de las partículas en el suelo. En la figura 4.1 se pueden observar las distribuciones de energía de los fotones, electrones, positrones, muones positivos y muones negativos que alcanzaron el nivel del suelo en dos simulaciones diferentes que fueron iniciadas con los mismos parámetros. En ambas simulaciones el primario fue un protón de 10^{19} eV de energía que incidió de manera vertical. En ambos casos se seleccionó el mismo modelo atmosférico y como único nivel de observación el nivel del suelo a la altura y en la ubicación de la ciudad de Malargüe. La única diferencia entre ambas simulaciones fue la 'semilla' utilizada para inicializar los generadores de números pseudoaleatorios.

Notemos que en ambos casos las curvas correspondientes a los electrones y positrones son tan similares que se solapan. Lo mismo ocurre para las curvas correspondientes a los muones positivos y los muones negativos. En el caso de los electrones y positrones esto se debe a que el proceso principal por el cual son creados es la creación de pares por parte de los fotones en el cual son generados tantos electrones como positrones. Para el caso de los



(a) Simulación 1



(b) Simulación 2

Figura 4.1: Distribuciones de energía de fotones, electrones, positrones, muones negativos y muones positivos al nivel del suelo para dos simulaciones llevadas a cabo con CORSIKA iniciadas con un protón de 10^{19} eV de energía.

muones la razón es que el número de muones negativos y muones positivos principalmente aumenta debido a los decaimientos de los piones negativos y positivos, respectivamente, y estos dos tipos de partículas a su vez son creadas con la misma probabilidad en las interacciones hadrónicas (las secciones eficaces son iguales para ambos procesos).

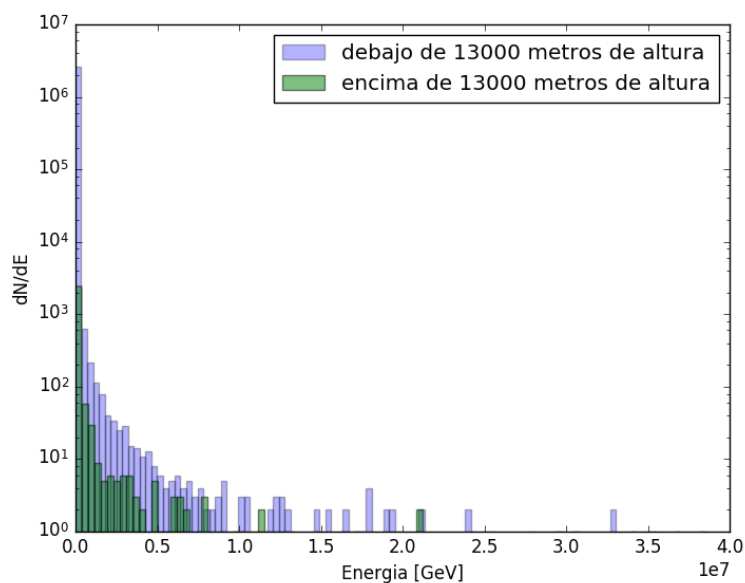
Los resultados reflejados en cada una de las gráficas son claramente diferentes. No sólo ocurre que el número de cada partícula en cuestión para una energía dada varía de una cas-

cada a la otra sino que también se puede observar que la razón entre cantidades de partículas diferentes cambia. Por un lado, todos los espectros correspondientes a la simulación 2 en la gráfica 4.1b están por encima de los que corresponden a la simulación 1 presentados en la gráfica 4.1a. Por otro lado, para energías entre 10 y 100 GeV el espectro de los muones y el de los electrones en la gráfica 4.1a son similares y están separados del de los fotones. Entretanto, en la gráfica 4.1b para ese rango de energías el espectro de los muones se separa del de los electrones y se acerca al de los fotones. Estas diferencias se deben justamente a que las interacciones hadrónicas a una etapa temprana del desarrollo de la cascada fueron diferentes gracias a que estos procesos son generados de manera estocástica.

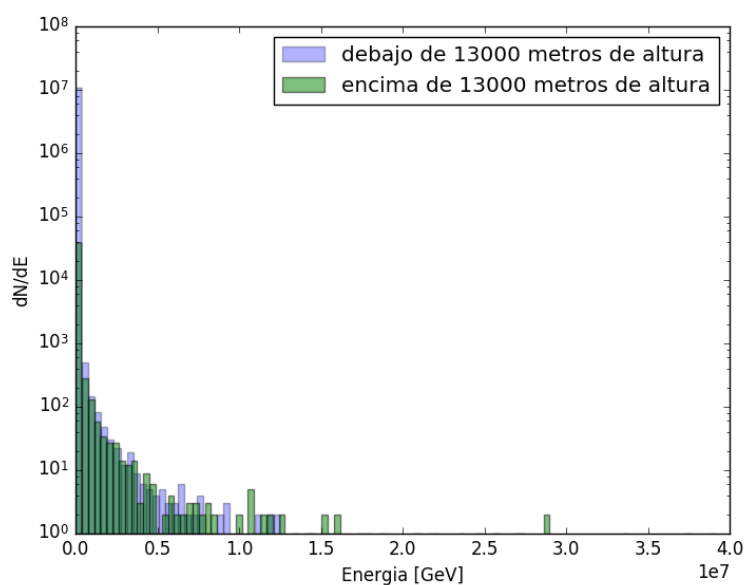
Analizando las gráficas dadas en la figura 4.2 se puede explicar por qué en la simulación 2 la cantidad de energía que transportan las partículas estudiadas hasta el nivel del suelo es más alta que la correspondiente a la simulación 1. En esta figura se pueden apreciar las distribuciones de energía de las partículas madre de todos los electrones, positrones y fotones que alcanzaron el nivel del suelo (correspondientes a las mismas dos simulaciones). En CORSIKA existe la opción de almacenar la información de las madres y abuelas de todas las partículas que llegan a un nivel de observación [16]. La madre de una partícula se define como el último hadrón presente en la cadena de reacciones que dio lugar a la partícula en cuestión y la abuela como la partícula que generó a la madre. En la figura 4.2 las distribuciones están separadas según si la madre desató la cadena que generó la partícula en cuestión a más de 13000 metros de altura o a menos. El histograma azul corresponde al espectro de energía de las madres que interactuaron o decayeron a más de 13000 metros de altura y el histograma verde al de las que interactuaron o decayeron a menos de 13000 metros de altura. Como se puede observar, en la segunda simulación la proporción entre la energía transferida a la componente EM que alcanza el suelo a más de 13000 metros y la transferida a menos de 13000 metros es mucho más alta que en la primera simulación. Efectivamente, para la primera simulación este porcentaje vale aproximadamente 15 % y para la segunda simulación 47 %.

Se puede interpretar la diferencia recién descrita entre las figuras 4.2a y 4.2b del siguiente modo. La componente EM que impacta en el suelo en la simulación 2 proviene de una fracción más alta (comparada con la de la simulación 1) de partículas de una etapa temprana del desarrollo de la cascada. En esta etapa las partículas tienen notablemente más energía que las partículas en el desarrollo subsecuente. Esto explica por qué en la segunda simulación llega al nivel del suelo más energía.

En la figura 4.3 se pueden observar los espectros de energía de los fotones, electrones, positrones, muones negativos y muones positivos que alcanzaron el nivel del suelo en otras simulaciones realizadas. La única diferencia entre éstas y las anteriores es la identidad del primario seleccionada. En la simulación correspondiente a la figura 4.3a el primario fue un



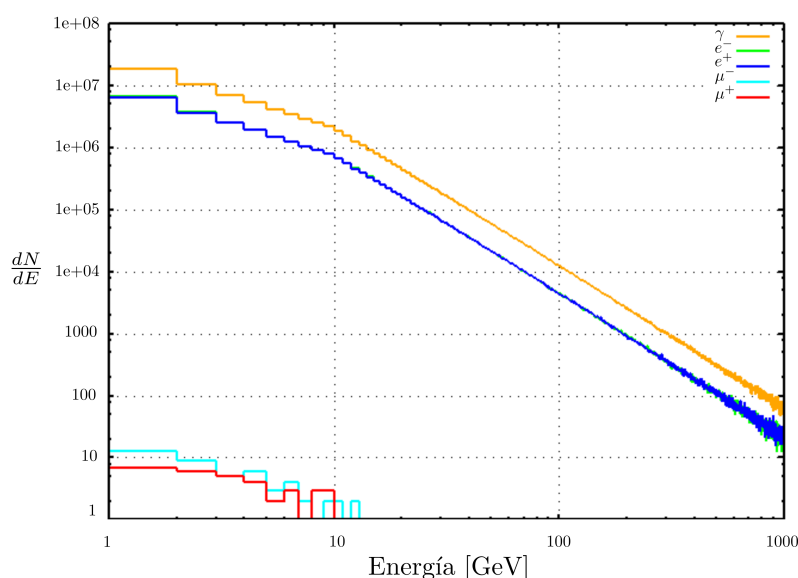
(a) Simulación 1



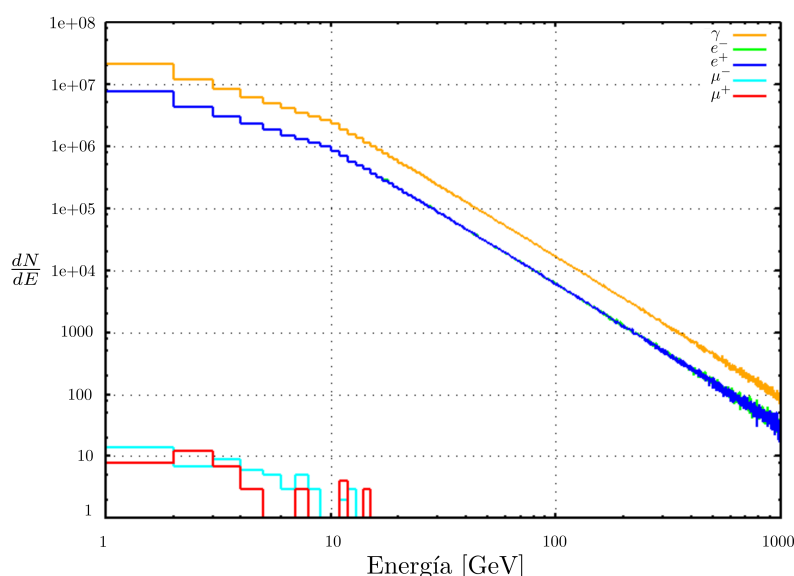
(b) Simulación 2

Figura 4.2: Distribuciones de energía de las partículas madre de todos los electrones, positrones y fotones que alcanzaron el nivel del suelo, separadas según si la madre interactuó o decayó a más de 13000 metros de altura o a menos.

electrón y en la que corresponde a la figura 4.3b el primario fue un fotón. Además, como es de suponer, nuevamente la semilla que inicializa el generador de números aleatorios en ambos casos es otra. De nuevo ocurre, por las mismas razones expuestas anteriormente, que la distribución de electrones y positrones es similar y que también los muones negativos y los muones positivos están casi igualmente representados.



(a) Partícula primaria: electrón



(b) Partícula primaria: fotón

Figura 4.3: Distribuciones de energía de fotones, electrones, positrones, muones negativos y muones positivos al nivel del suelo para dos simulaciones llevadas a cabo con CORSIKA iniciadas con diferentes partículas primarias de 10^{19} eV.

Lo que llama la atención al comparar las simulaciones exhibidas en las figuras 4.3a y 4.3b es que las curvas correspondientes a los fotones, electrones y positrones muestren un comportamiento tan similar en ambas simulaciones siendo que esta vez las cascadas fueron inicializadas por partículas diferentes. La explicación aquí es que en una lluvia atmosférica extendida cuyo primario fue un fotón, un positrón o un electrón de muy alta energía se crean un número tan grande de estas mismas partículas que es de esperar que en definitiva no haya manera de distinguir a posteriori con cual de ellas comenzó la cadena de reacciones. Más

aún, aquí se presenta una diferencia sustancial con las cascadas hadrónicas. En éstas últimas es frecuente que en el eje hadrónico permanezcan fragmentos hadrónicos de la partícula original con una fracción alta de la energía primaria. Estos fragmentos que subsisten provocan que la cascada se desarrolle de una manera diferente a como hubiese evolucionado si, por ejemplo, las energías se distribuían equitativamente entre los productos de las interacciones y los decaimientos. En cascadas electromagnéticas esto no ocurre, las partículas constantemente interactúan y se multiplican. Esto imposibilita que una partícula se lleve una fracción importante de la energía primaria para de este modo impactar con un cambio sustancial sobre el comportamiento de la cascada.

Notemos por último que en estas dos lluvias llega al nivel del suelo una pequeña cantidad de muones. Estos son producidos por fotones que tienen suficiente energía como para crear un par $\mu^- - \mu^+$. Naturalmente hay más procesos que aportan notablemente más energía a la componente muónica (como típicamente los decaimientos de piones cargados) pero estos procesos requieren de partículas que no pertenecen a la componente EM. Si bien se evidencia aquí que los procesos que ocurren en una cascada electromagnética no sólo producen fotones y electrones sino también muones, se puede concluir que el número de muones es tan pequeño que es sensato despreciar en los modelos el efecto de los procesos que los crean y concentrarse en los procesos descritos en los capítulos 2 y 3.

Este estudio de cascadas individuales sirve para ganar consciencia del comportamiento que pueden presentar lluvias generadas por rayos cósmicos. Ahora bien, para obtener resultados más relevantes es necesario recurrir a una gran cantidad de simulaciones.

4.3. Aplicación al estudio del perfil longitudinal

La idea que quedó abierta en la sección 3.3 es que sabiendo de qué modo el eje hadrónico infunde energía en la componente electromagnética, efecto que se describe con la función F definida en aquella sección, es posible reconstruirla completamente. Para ganar consciencia acerca de la forma que puede tomar esta función se realizaron diversas simulaciones en CO-NEX. Se tomó como primario siempre un protón de 10^{20} eV de energía y se hizo variar la energía de corte. En estas simulaciones se decidió almacenar la lista de todos los secundarios creados.

Al disponer de información acerca de los secundarios, una manera de construir la función F es recopilando todas las partículas que emergen a lo largo de la lluvia y que, al decaer, pueden tener como producto fotones o electrones. Es sabido que la fuente principal de partículas que infunden energía en la componente EM son los piones neutros. No obstan-

te, podría ser conveniente, ya que se dispone de una lista de todas las partículas secundarias creadas, considerar también los kaones K^+ , K^- y K_L^0 o incluso más partículas. Para ver si esto es sensato se examinó la cantidad de piones neutros, kaones cargados y K_L^0 presentes a diferentes profundidades atmosféricas (en $\frac{g}{cm^2}$) para una simulación en particular realizada con una energía de corte de 10^{15} eV. Se pudo resolver que el número de piones sobrepasa a cualquier profundidad el de las demás partículas en un orden de magnitud. Este hecho es un indicio de que el aporte de los kaones es despreciable.

Para confirmar esta suposición se comparó la subcascada electromagnética generada por los piones neutros con la que generan los kaones cargados y los K_L^0 , respectivamente. Para ello se efectuó una cuenta equivalente a la que fue presentada en la ecuación (3.29). El proceso consiste en sumar para cada grupo de partículas en estudio por separado las subcascadas EM generadas por cada una de las partículas individuales presentes en ese grupo. Las subcascadas individuales son descriptas mediante una aproximación que desarrolló el físico estadounidense Kenneth Greisen. La *ecuación de Greisen* [20] indica el número total aproximado de partículas en una cascada electromagnética:

$$\Pi\left(t, \frac{E_0}{\varepsilon}\right) \approx \frac{0,31}{\sqrt{\beta_0}} e^{t(1-\frac{3}{2}\ln s)}.$$

En esta expresión t es la profundidad como fue definida en el capítulo 2, E_0 es la energía de la partícula que inicia la subcascada, β_0 viene dado por

$$\beta_0 = \ln\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right),$$

donde ε es la energía crítica como fue definida en el capítulo 2, y s es la edad de la cascada definida como

$$s = \frac{3t}{t + 2\beta_0}.$$

Empleando esta aproximación para cada una de las subcascadas EM individuales se obtiene la figura 4.4. Allí están exhibidas las subcascadas EM generadas por (a) piones neutros, (b) K_L^0 y (c) kaones cargados, respectivamente. Se confirma la suposición que las subcascadas EM generadas por partículas que no son piones neutros aportan notablemente menos al volumen de la cascada EM total que las generadas por los piones neutros.

Por lo tanto se decidió despreciar el efecto de los kaones e igualar la función F con la distribución longitudinal de los piones neutros multiplicada por 2 ya que cada pión decae a 2 fotones. Se supone además que cada fotón se lleva la mitad de la energía del pión que los crea. Con esta elección para la función F fue generada la componente electromagnética (según el modelo recién descripto) para 1000 simulaciones realizadas en CONEX con un

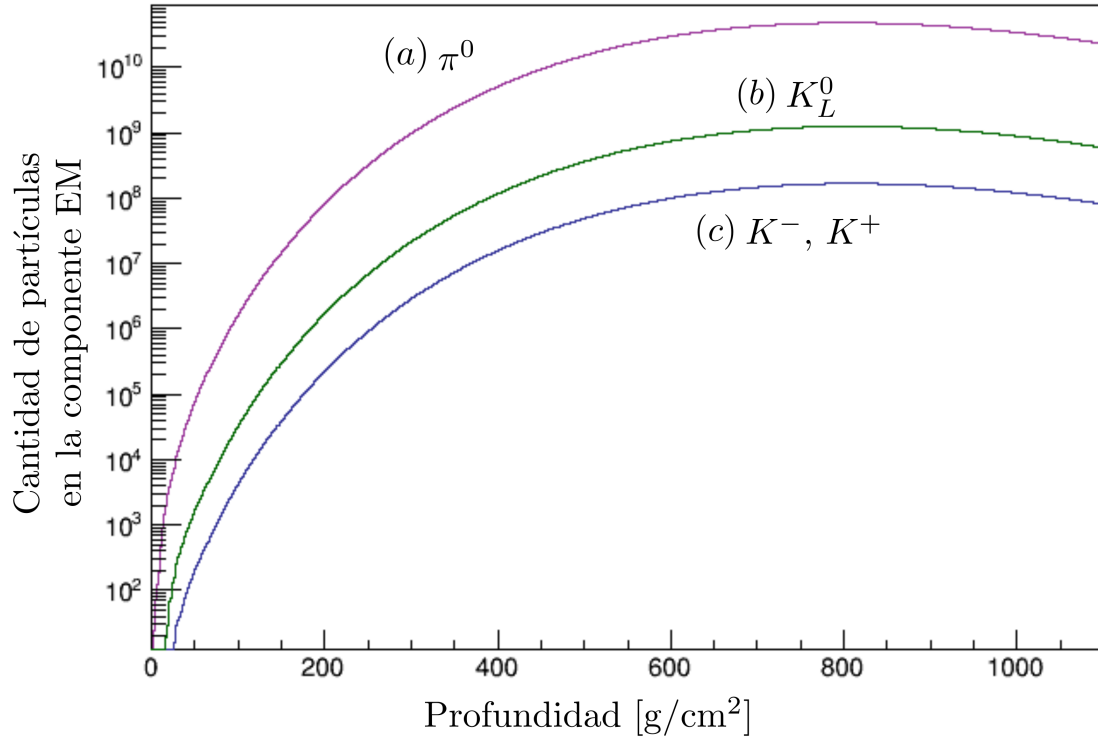


Figura 4.4: Gráficas de las subcascadas electromagnéticas generadas por el grupo de piones neutros, kaones cargados y K_L^0 .

protón inicial de 10^{20} eV de energía que incide de manera vertical sobre el nivel del mar (que se encuentra a una profundidad de aproximadamente $1000 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$).

CORSIKA brinda información acerca del desarrollo longitudinal de la componente EM que generó la simulación. El programa ajusta la función de Gaisser-Hillas al perfil longitudinal y guarda los parámetros de este ajuste. Esta función fue propuesta por Thomas Gaisser y Anthony Hillas e indica el número de partículas N como función de la profundidad X atravesada por la lluvia [21]:

$$N(X) = N_{\max} \left(\frac{X - X_0}{X_{\max} - X_0} \right)^{\frac{X_{\max} - X_0}{a + bX + CX^2}} \cdot \exp \left(\frac{X_{\max} - X_0}{a + bX + CX^2} \right)$$

donde X_{\max} es la profundidad a la cual se alcanza el máximo, X_0 es la profundidad a la cual ocurre la primera interacción y N_{\max} es el número máximo de partículas. No se trata de una expresión obtenida analíticamente pero representa de manera muy acertada perfiles longitudinales de lluvias atmosféricas extendidas. En realidad la versión original de la función de Gaisser-Hillas tiene un parámetro λ en lugar de la expresión $a + bX + CX^2$ pero en CORSIKA se utiliza esta última para obtener un mejor ajuste.

Se puede comparar ahora para las 1000 cascadas la componente EM calculada (haciendo uso de la ecuación de Greisen) con la que viene descrita por la ecuación de Gaisser-Hillas que obtuvo CORSIKA. Más concretamente, se puede comparar el número máximo de partículas que se denotan val_{max} y N_{max} , respectivamente, y la profundidad a la cual se alcanza este número máximo que son llamados bin_{max} y X_{max} , respectivamente. En la figura 4.5 se pueden apreciar los histogramas de los errores obtenidos. La gráfica dada en 4.5a exhibe un histograma de las diferencias entre las profundidades X_{max} y bin_{max} . Como se puede observar, esta diferencia se centra alrededor de los $-20 \frac{g}{cm^2}$. Esto significa que generalmente se atrasa la posición del máximo de la distribución calculada con respecto al perfil obtenido por CORSIKA. En la gráfica 4.5b se puede observar un histograma de las diferencias relativas entre el número máximo val_{max} obtenido por CORSIKA y el número máximo bin_{max} calculado. Lo que se puede deducir de esta gráfica es que la cascada EM generada superponiendo todas las subcascadas generadas por los piones neutros generalmente es inferior a la que revela CORSIKA.

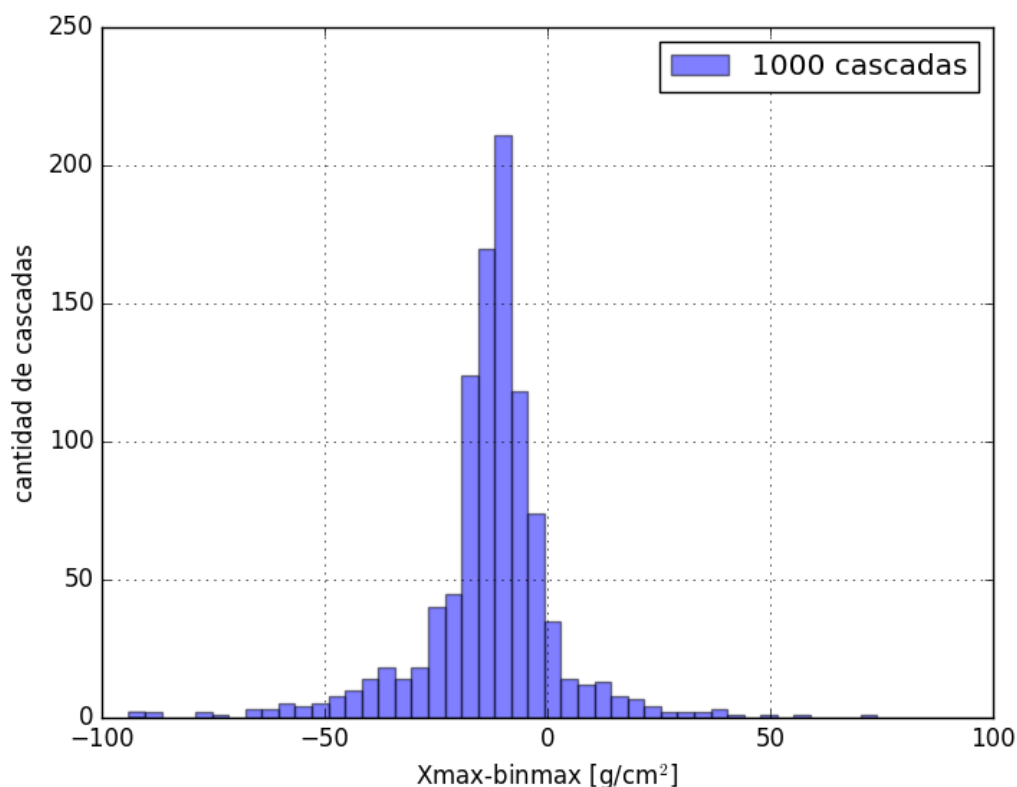
La situación ideal sería que X_{max} fuese siempre igual a bin_{max} , es decir que en la figura 4.6 los puntos estuviesen todos sobre la recta punteada azul. En este diagrama de dispersión el eje x corresponde a los valores de X_{max} y el eje y a los de bin_{max} y cada punto corresponde a una de las 1000 simulaciones. Nuevamente se puede observar que los puntos están generalmente levemente por encima de la línea recta, es decir, que los máximos calculados están atrasados comparados con los que obtiene CORSIKA.

Cabe resaltar en todo caso que el desvío de $-20 \frac{g}{cm^2}$ es pequeño frente a las grandes fluctuaciones que hay cascada a cascada (más de $200 \frac{g}{cm^2}$) las cuales están muy bien reproducidas por el modelo. Esta desviación puede ser explicada de la siguiente manera. En CONEX, al simular las subcascadas que son generadas por las partículas que tienen energía menor que la energía de corte, a estas se las extrae de la lista de secundarios para desviarlas al algoritmo que efectúa las aproximaciones de las expresiones analíticas. Esto implica que la función F tal como la definimos no incluye todos los piones de interés sino que le faltan los piones que tienen energía menor que la energía de corte. Al no tener en cuenta los piones de menor energía se están ignorando las subcascadas que ellos generan y son precisamente las que menos profundidad alcanzan. Como consecuencia la subcascada EM generada por los piones neutros de la lista de secundarios es a cualquier profundidad inferior a la obtenida por la simulación completa y está desplazada hacia profundidades más avanzadas ya que lo que le falta son las subcascadas que menor profundidad alcanzan.

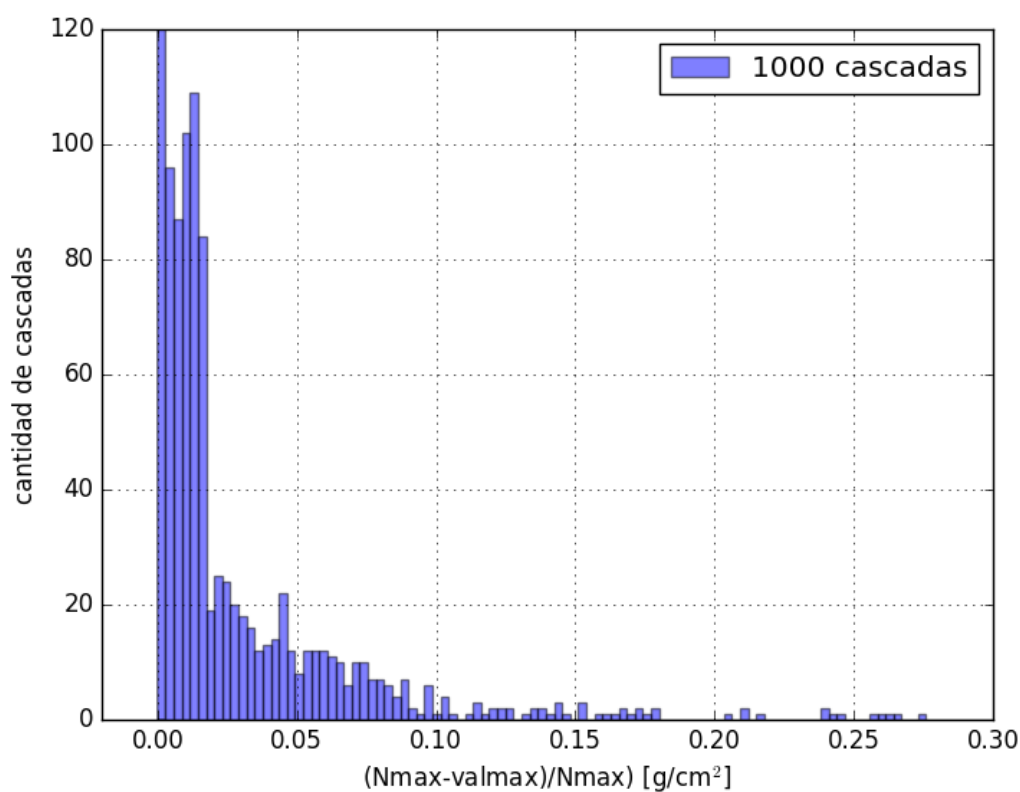
Se verifica esta suposición del siguiente modo: para una simulación en particular se imponen de manera artificial diferentes energías de corte, es decir se eliminan los piones neutros

con energía menor que ciertas energías preestablecidas. El efecto esperado es que la curva correspondiente a la componente electromagnética se corra aún más hacia profundidades más avanzadas, que se vea aún más disminuída y que este efecto sea más pronunciado para energías de corte más altas. En la figura 4.7 están graficadas (para una simulación en particular de las 1000 que fueron estudiadas en las gráficas anteriores) las curvas correspondientes a la componente electromagnética generada por los piones presentes en la lista de secundarios con energías de corte artificiales de 10^{16} eV, 10^{17} eV y 10^{18} eV y sin realizar un corte artificial. Efectivamente se observa el efecto esperado.

Por último vale la pena resaltar otro efecto que se puede observar en la figura 4.6 y es que los puntos que peor se ajustan a la recta corresponden a cascadas cuyo máximo se encuentra a profundidades más altas que unos $1000 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$. Recordemos que estas simulaciones fueron realizadas tomando cascadas verticales y como nivel de observación la altura equivalente al nivel del mar. A partir de esta altura, que para algunas partículas representa aproximadamente la profundidad máxima, en las simulaciones no se crean más partículas. Es de esperar que no sean buenas las aproximaciones que realiza CORSIKA al ajustar perfiles longitudinales que son truncados con la función de Gaisser-Hillas.



(a) Histograma de los errores absolutos $X_{\max} - bin_{\max}$



(b) Histograma de los errores relativos $(N_{\max} - val_{\max})/N_{\max}$

Figura 4.5: Histogramas de los errores al comparar las cascadas eletromagnéticas de 1000 lluvias simuladas (escogiendo un corte de 10^{15} eV) con las cascadas eletromagnéticas producidas por los piones neutros de la misma.

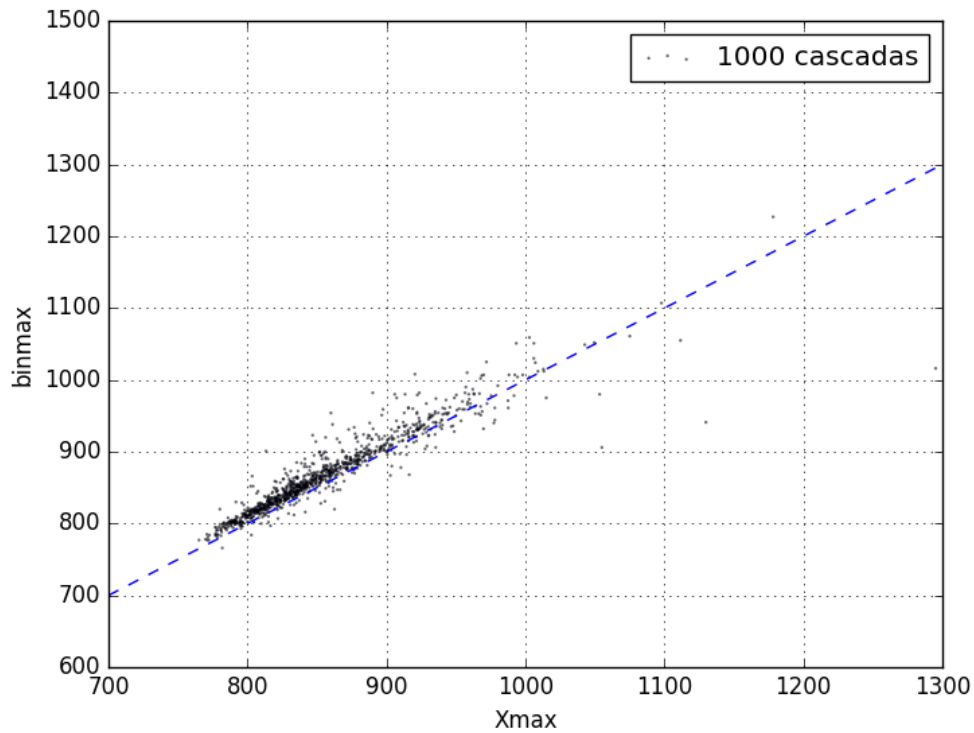


Figura 4.6: Diagrama de dispersión en el que cada punto corresponde a una de las 1000 simulaciones.

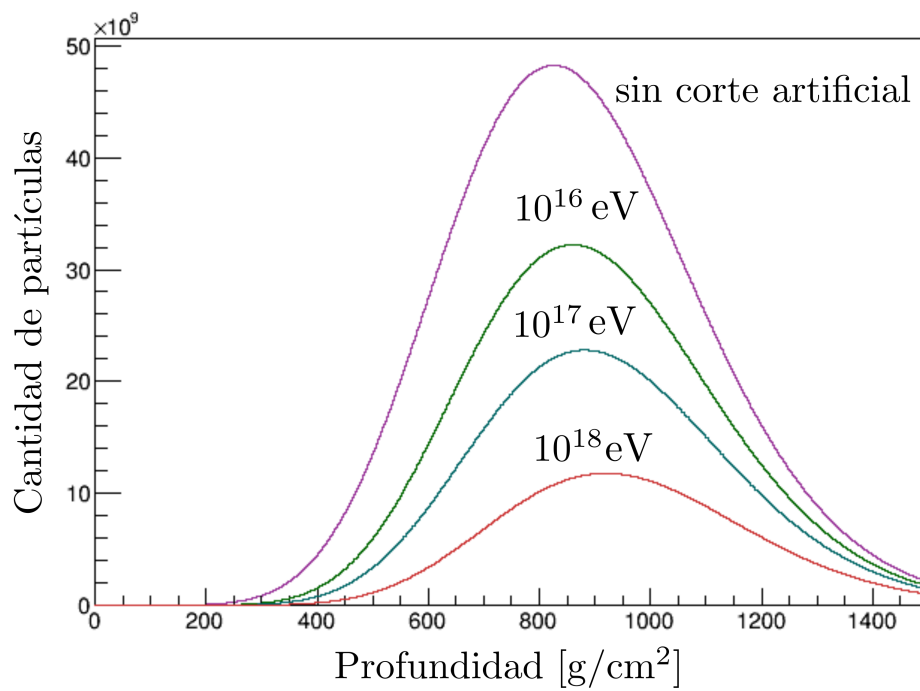


Figura 4.7: Para una simulación en particular (con energía de corte 10^{15} eV) están presentadas las curvas correspondientes a la componente electromagnética generada por los piones presentes en la lista de secundarios con energías de corte artificiales de 10^{16} eV, 10^{17} eV y 10^{18} eV y sin realizar un corte artificial.

Capítulo 5

Conclusiones

El estudio de la componente electromagnética de lluvias atmosféricas extendidas generadas por rayos cósmicos de alta energía cumple un rol muy importante ya que conforma un modo de acercamiento a otros enigmas aún no resueltos. Antes de que existieran computadoras capaces de efectuar simulaciones como las que se pueden realizar hoy en día con CORSIKA y CONEX fueron desarrollados modelos analíticos para su descripción.

En el presente trabajo se estudiaron los modelos de la teoría unidimensional en las aproximaciones A y B, principalmente desarrollados por B. Rossi y K. Greisen. Con el paso del tiempo se fueron mejorando las técnicas experimentales para la recolección de datos de medición por lo que se hizo indispensable una comprensión más detallada del comportamiento de las cascadas. Con este fin fueron desarrolladas las funciones de estructura lateral y angular. Se estudiaron las expresiones perfeccionadas por J. Nishimura y K. Kamata empleando la aproximación de Landau.

Con el propósito de comprender el comportamiento que pueden presentar lluvias atmosféricas extendidas se estudiaron cascadas individuales simuladas con CORSIKA con protones, electrones y fotones de 10^{19} eV de energía como partícula primaria. Se analizaron las distribuciones de las partículas más representadas al nivel del suelo. Para cascadas hadrónicas se observaron claras diferencias en las formas de las distribuciones cascada a cascada mientras que las distribuciones generadas por electrones y fotones primarios reflejan notables similitudes. Estos efectos se los atribuye a que en cascadas hadrónicas pueden prevalecer fragmentos energéticos de la partícula primaria cerca del eje de la cascada e infundir importantes cantidades de energía en etapas más avanzadas del desarrollo de la misma mientras que en cascadas electromagnéticas las partículas interactúan tan frecuentemente que la energía se distribuye de una manera más equitativa.

Se propuso reconstruir el perfil longitudinal de la componente electromagnética de cas-

cadass simuladas superponiendo las subcascadas electromagnéticas generadas por partículas cuya distribución viene descripta por una función F . Esta función describe el modo en el cual el eje hadrónico infunde energía a la componente electromagnética y fue igualada a la distribución de piones neutros presentes en el desarrollo de la cascada multiplicada por 2 (ya que éstos decaen a 2 fotones). Para recrear las subcascadas generadas por los piones se utilizó un modelo de la teoría unidimensional para lluvias atmosféricas extendidas. Este procedimiento fue efectuado sobre un conjunto de mil simulaciones realizadas con el programa CONEX. Como partícula primaria se escogió siempre un protón de 10^{20} eV de energía y una energía de corte de 10^{15} eV. Se comprobó que la reconstrucción coincide muy bien con la componente electromagnética completa obtenida en la simulación una vez teniendo en cuenta que el programa desvía el conjunto de partículas que tiene energía menor que la energía de corte preestablecida a un algoritmo que simula la evolución de las partículas de baja energía.

Apéndice A

La transformada de Mellin

La *transformada de Mellin* [22] es, al igual que la *transformada de Fourier*, una transformada funcional. Éstas comprenden una herramienta poderosa a la hora de resolver ecuaciones diferenciales o ecuaciones integrales con condiciones de contorno o iniciales. La diferencia entre ambas es que el kernel de la primera es polinomial mientras que el de la segunda involucra funciones trigonométricas. La popularidad de la transformada de Mellin se basa en parte en que es apropiada para reducir ciertas ecuaciones diferenciales a expresiones algebraicas y ecuaciones integrales con kernel de cierto tipo a ecuaciones diferenciales.

Dada una función $f(x)$ localmente integrable en $(0, \infty)$ (o sea, absolutamente integrable en todos los subintervalos cerrados de $(0, \infty)$) su transformada de Mellin está definida como

$$\mathcal{M}_f(s) = \int_0^\infty x^s f(x) dx \quad (\text{A.1})$$

donde s es una variable compleja. Si esta integral está bien definida en una región de la forma $\mathcal{R}(s) \leq \mathcal{R}(\bar{s})$ para un cierto valor de \bar{s} entonces la transformada inversa viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\mathcal{M}_f(s)}{x^{s+1}} ds \quad (\text{A.2})$$

donde el camino de integración C es paralelo al eje imaginario y se encuentra en el dominio de convergencia de (A.1).

Consideremos ahora un ejemplo concreto en el cual el kernel de la ecuación integro-diferencial es una fracción y veamos que efectivamente el problema se reduce a uno más

sencillo. Sea el siguiente el problema a resolver:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \int_0^\infty K\left(\frac{x}{y}\right) f(y) \frac{dy}{y} \\ f(x,0) = \delta(x-x_0) \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación y la condición inicial por x^s e integrando obtenemos

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{M}_f(s,t)}{\partial t} = \mathcal{M}_K(s) \mathcal{M}_f(s,t) \\ \mathcal{M}_f(s,0) = x_0^s \end{cases}$$

ya que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^s \int_0^\infty K\left(\frac{x}{y}\right) f(y) \frac{dy}{y} dx &= \int_0^\infty y^s f(y) \int_0^\infty \left(\frac{x}{y}\right)^s K\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dx}{y} dy \\ &= \int_0^\infty a^s f(a) \int_0^\infty b^s K(b) db da \end{aligned}$$

donde en el último paso hicimos el cambio de variables $a = y$, $b = x/y$ (o equivalentemente $x = ab$, $y = a$) al cual corresponde el jacobiano $J = \frac{D(x,y)}{D(a,b)} = -a$. La solución de este último sistema es fácil de obtener:

$$\mathcal{M}_f(s,t) = e^{\mathcal{M}_K(s)t} x_0^s.$$

Finalmente obtenemos la solución del problema inicial utilizando la transformada de Mellin inversa:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{x_0}{x}\right)^s \frac{1}{x} e^{\mathcal{M}_K(s)t} ds.$$

Apéndice B

Método del punto de ensilladura

Al utilizar la transformada de Mellin para encontrar soluciones es habitual obtener integrales que se pueden escribir de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{\phi(s)} ds.$$

Si esta integral no puede ser resuelta aplicando el teorema de los residuos es posible recurrir al *método del punto de ensilladura* para obtener un valor numérico de la misma [11].

Sea $\bar{s} \in \mathbb{C}$ tal que

$$\phi'(\bar{s}) = 0, \phi''(\bar{s}) > 0.$$

Como en el presente trabajo se va a tratar de funciones ϕ diferenciables valen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma compleja:

$$\phi'(s) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(s) = -i \frac{\partial \phi}{\partial y}(s)$$

donde $s = x + iy$. De éstas se concluye además que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}.$$

Esto significa que como $\phi'(\bar{s}) = 0$ y $\phi''(\bar{s}) > 0$ valdrá que $\frac{\partial \phi}{\partial x}(\bar{s}) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(\bar{s}) = 0$ y $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(\bar{s}) < 0$ por lo que podemos deducir que en \bar{s} se presentará un mínimo en la dirección del eje real y un máximo en la dirección del eje imaginario. Es decir, \bar{s} es un punto de ensilladura.

Si ahora elegimos que el eje de integración pase por \bar{s} , la contribución más importante al valor de la integral vendrá de la porción de este eje que se encuentra en un entorno de \bar{s} . Por lo tanto podemos calcular la integral aproximando a $\phi(s)$ por su serie de Taylor de orden 2

alrededor de \bar{s} :

$$\phi(s) = \phi(\bar{s}) + \frac{(s - \bar{s})^2}{2} \phi''(\bar{s}).$$

Haciendo el cambio de variables $s - \bar{s} = iy$ obtenemos el resultado deseado:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} e^{\phi(\bar{s})} \int_C e^{\frac{(s-\bar{s})^2}{2} \phi''(\bar{s})} ds = \frac{1}{2\pi} e^{\phi(\bar{s})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2} \phi''(\bar{s})} dy = \frac{e^{\phi(\bar{s})}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\phi''(\bar{s})}}.$$

Bibliografía

- [1] Letessier-Selvon, A., Stanev, T. Ultrahigh energy cosmic rays. *Reviews of modern physics*, **83** (3), 907, 2011. [vii](#), [2](#), [3](#), [6](#)
- [2] Aab, A., *et al.* [the pierre auger collaboration]. *Nucl. Instrum. Meth.*, **A798**, 172–213, 2015. [vii](#), [4](#), [5](#)
- [3] Matthews, J. A Heitler model of extensive air showers. *Astropart. Phys.*, **22**, 387–397, 2005. [vii](#), [9](#), [10](#)
- [4] Olive, K. A., *et al.* Review of Particle Physics. *Chin. Phys.*, **C38**, 090001, 2014. [1](#), [8](#)
- [5] Kachelriess, M. Lecture notes on high energy cosmic rays, 2008. [1](#)
- [6] Grieder, P. Extensive Air Showers: High Energy Phenomena and Astrophysical Aspects A Tutorial, Reference Manual and Data Book, tomo 1. 1^a ed^{ón}. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. URL <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=F72AE0B86EA0C84B9B5574635D2D49D5>. [2](#), [6](#), [20](#)
- [7] Aab, A., *et al.* Depth of maximum of air-shower profiles at the Pierre Auger Observatory. II. Composition implications [The Pierre Auger Collaboration]. *Phys. Rev.*, **D90** (12), 122006, 2014. [5](#), [6](#)
- [8] Abreu, P., *et al.* Interpretation of the Depths of Maximum of Extensive Air Showers Measured by the Pierre Auger Observatory [The Pierre Auger Collaboration]. *JCAP*, **1302**, 026, 2013. [5](#), [6](#)
- [9] Kamata, K., Nishimura, J. The lateral and the angular structure functions of electron showers. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, **6**, 93–155, 1958. [7](#), [13](#), [15](#), [37](#)
- [10] Rossi, B., Greisen, K. Cosmic-ray theory. *Reviews of Modern Physics*, **13** (4), 240, 1941. [9](#), [11](#), [12](#), [19](#)
- [11] Flüge, S. Cosmic Rays II / Kosmische Strahlung II. Encyclopedia of Physics 9 / 46 / 2, 1^a ed^{ón}. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1967. [11](#), [13](#), [15](#), [16](#), [21](#), [23](#), [27](#), [31](#), [59](#)

- [12] Gaisser, T. K. Cosmic rays and particle physics. *Comments on Nuclear and Particle Physics*, **11** (1), 25–39, 1982. 17
- [13] Kampert, K.-H., Watson, A. A. Extensive Air Showers and Ultra High-Energy Cosmic Rays: A Historical Review. *Eur. Phys. J.*, **H37**, 359–412, 2012. 17
- [14] Williams, E. *Physical Review*, **58** (4), 292, 1940. 20
- [15] Espadanal, J. C. Measurement of the muon content of EAS with the Pierre Auger Observatory, págs. 287–292. URL http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814689304_0045. 39
- [16] Heck, D., Engel, R. The EHISTORY and MUPROD Options of the Air Shower Simulation Program CORSIKA, 2013. 39, 44
- [17] Knapp, J., Heck, D. Extensive Air Shower Simulation with CORSIKA: A User's Manual. Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1993. 40, 42
- [18] Heck, D., Schatz, G., Thouw, T., Knapp, J., Capdevielle, J. N. CORSIKA: A Monte Carlo code to simulate extensive air showers, 1998. 40, 42
- [19] Kalmykov, N. N., *et al.* One-dimensional hybrid simulation of EAS using cascade equations. *En: Proceedings, 28th International Cosmic Ray Conference (ICRC 2003): Tsukuba, Japan, July 31-August 7, 2003*, págs. 511–514. 2003. URL <http://www-rccn.icrr.u-tokyo.ac.jp/icrc2003/PROCEEDINGS/PDF/128.pdf>. 41
- [20] Schiel, R. W., Ralston, J. P. The greisen equation explained and improved. *Physical Review D*, **75** (1), 016005, 2007. 48
- [21] Grieder, P. Extensive Air Showers: High Energy Phenomena and Astrophysical Aspects A Tutorial, Reference Manual and Data Book, tomo 2. 1ª ed^{ón}. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. URL <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=F72AE0B86EA0C84B9B5574635D2D49D5>. 49
- [22] Arfken, G. B., Weber, H. J., Harris, F. E. Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide. Academic press, 2011. 57

Agradecimientos

A Manuel Gonzalez por acompañarme y apoyarme día a día y llenar mi vida de alegría.

A Xavier Bertou y Hernán Asorey por poder contar con ellos siempre y compartir la mejor oficina conmigo.

A Paola Hojuela y los niños Joaquín y Leticia por hacerme sentir que soy tía.

A Alberto Giraldo y Mario Solis por tantos buenos momentos en épocas de crisis.

